eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

Ejercicios resueltos

OCW 2018: *Utilizando Mathematica como apoyo al cálculo algebraico en los grados de Ingeniería*

Tema 3. Sistemas de ecuaciones lineales

Equipo docente del curso
Martín Yagüe, Luis
Unzueta Inchaurbe, Aitziber
Arrospide Zabala, Eneko
García Ramiro, María Begoña
Soto Merino, Juan Carlos
Alonso González, Erik

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

OpenCourseWare

CC BY NC SA

EJERCICIOS DEL TEMA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio nº1

Enunciado

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x+z+t=1 \\ -x+3y-2z-3t=1 \\ 3x+2y+2z+2t=2 \end{cases}$$

- a) Obtenga y represente matricialmente la matriz de coeficientes, A.
- b) Calcule la inversa de A.
- c) Resuelva el sistema de ecuaciones haciendo uso del resultado del apartado anterior.

Resolución

- a) Obtenga y represente matricialmente la matriz de coeficientes, A.
  - Se define la matriz de coeficientes, A

```
A = {{1, 1, 1, 1}, {1, 0, 1, 1}, {-1, 3, -2, -3}, {3, 2, 2, 2}}
```

```
{{1, 1, 1, 1}, {1, 0, 1, 1}, {-1, 3, -2, -3}, {3, 2, 2, 2}}
```

  - Se utiliza la función **MatrixForm[A]** para representar matricialmente la matriz A

```
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- b) Calcule la inversa de A.
  - Para que exista A^{-1}, la matriz A debe ser regular (su determinante debe ser no nulo); se usa la función **Det[*A*]** para el cálculo del determinante

```
Det[A]
```

```
1
```

  - El determinante es distinto de cero; por tanto, se procede a calcular A^{-1} haciendo uso de la función **Inverse[*A*]** y se representa matricialmente el resultado

```
ai = Inverse[A]
```

```
{{-2, 0, 0, 1}, {1, -1, 0, 0}, {1, 6, 1, -2}, {1, -5, -1, 1}}
```

  - Se representa matricialmente el resultado

```
MatrixForm[ai]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Resolver el sistema de ecuaciones haciendo uso del resultado del apartado anterior.
  - La solución es única ya que se trata de un sistema compatible determinado, siendo AM la matriz ampliada del sistema y n el número de incógnitas:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(AM) = 4 = n$$

  - El sistema de ecuaciones lineales se expresa de forma matricial como $A{\cdot}X{=}B$, donde A corresponde a la matriz de coeficientes, X la matriz columna de incógnitas y B la matriz columna de los términos independientes:

```
B = {2, 1, 1, 2};
```

  - Si se multiplican por la izquierda ambas partes de la ecuación por A^{-1} la ecuación resultante es (denotando $\mathbb{I}_4$ la matriz identidad de orden cuatro):

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow \mathbb{I}_4\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow X = A^{-1}\cdot B$$

  - Por tanto, para resolver el sistema de ecuaciones basta con multiplicar A^{-1} y B

```
X = Inverse[A].B // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

  - La solución es: $\boxed{\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 5 \\ t = -2 \end{cases}}$

Ejercicio nº2

Enunciado

Clasifique y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Resolución

- Se plantea un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial
- En primer lugar, se definen la matriz de coeficientes, A, la matriz columna de incógnitas, X, y la matriz columna de los términos independientes B :

```
A = {{2, 0, 4, 6}, {1, 1, 1, 1}, {-1, 3, -5, -9}}; B = {{-2}, {0}, {4}}; X = {{x}, {y}, {z}, {t}};
```

- Como la matriz de coeficientes no presenta parámetros reales, para resolver el sistema se usa la función **Solve**:

```
Solve[A.X == B, {x, y, z, t}]
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

```
{{z → 1 - 2 x - 3 y, t → -1 + x + 2 y}}
```

- Solución: $\boxed{\begin{cases} z = 1 - 2x - 3y \\ t = -1 + x + 2y \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}}$
- El sistema presenta infinitas soluciones en función de dos parámetros ya que se trata de un sistema compatible indeterminado, siendo AM la matriz ampliada del sistema y n el número de incógnitas:

$$|A| \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(AM) = 2 < 4 = n$$

```
AM = {{2, 0, 4, 6, -2}, {1, 1, 1, 1, 0}, {-1, 3, -5, -9, 4}};
```

```
{MatrixRank[A], MatrixRank[AM]}
```

```
{2, 2}
```

Ejercicio nº3

Enunciado

Clasifique y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$x_1 \overrightarrow{a_1} + x_2 \overrightarrow{a_2} = \vec{b} \quad \text{donde} \begin{cases} \overrightarrow{a_1} = (1, \alpha, 1) \\ \overrightarrow{a_2} = (\alpha, -1 - 2\alpha, \alpha) \\ \vec{b} = (1, -1, \alpha) \end{cases}$$

- a) Clasifique el sistema de ecuaciones lineales en función de los diferentes valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$; resuélvalo cuando sea compatible.
- b) Halle los rangos de las matrices A y $A|B$, siendo A la matriz de coeficientes y $A|B$ la matriz ampliada del sistema; justifique con ellos la clasificación realizada.
- c) Interprete geométricamente la solución obtenida cuando el sistema resulta compatible.

Resolución

- a) Clasifique el sistema de ecuaciones lineales en función de los diferentes valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$; resuélvalo cuando sea compatible.
  - Se plantea un sistema de ecuaciones lineales en forma vectorial
  - En primer lugar, se definen la matriz de coeficientes, A, la matriz columna de incógnitas, X, y la matriz columna de los términos independientes B:

```
A = {{1, α}, {α, -1 - 2 α}, {1, α}}; B = {{1}, {-1}, {α}}; X = {{x}, {y}};
```

  - Como la matriz de coeficientes presenta un parámetro real ($\alpha \in \mathbb{R}$), para clasificar y resolver el sistema se usa la función **Reduce**:

```
Reduce[A.X == B, {x, y}]
```

$\alpha == 1 \,\&\&\, x == \frac{1}{2} \,\&\&\, y == \frac{1}{2}$

  - Interpretando el resultado de la función **Reduce** se realiza la siguiente clasificación del sistema con la correspondiente resolución cuando el sistema resulta compatible:

Parámetro	***Naturaleza***	***Solución***
$\boldsymbol{\alpha = 1}$	Compatible determinado	$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$
$\boldsymbol{\alpha \neq 1}$	Incompatible	$--$

- b) Halle los rangos de las matrices A y $A|B$, siendo A la matriz de coeficientes y $A|B$ la matriz ampliada del sistema; justifique con ellos la clasificación realizada.
  - Se comprueba la clasificación mediante el cálculo de los rangos de la matriz de coeficientes, A, y de la matriz ampliada, $A|B$.

```
AB = {{1, α, 1}, {α, -1 - 2 α, -1}, {1, α, α}}
```

```
{{1, α, 1}, {α, -1 - 2 α, -1}, {1, α, α}}
```

  - Cuando $\alpha = 1$, los rangos de ambas matrices coinciden y son iguales al número de incógnitas; por tanto, se trata de un sistema compatible determinado:

```
{MatrixRank[A /. α → 1], MatrixRank[AB /. α → 1]}
```

```
{2, 2}
```

  - Cuando $\alpha \neq 1$, los rangos de ambas matrices son distintos con lo que se trata de un sistema incompatible:

```
Det[AB] // Factor
```

$-(-1+\alpha)\ (1+\alpha)^2$

```
la = Flatten[Minors[A, 2]]
```

$\{-1 - 2\alpha - \alpha^2, 0, 1 + 2\alpha + \alpha^2\}$

```
sol = Solve[Table[la[[i]] == 0, {i, Length[la]}], α] (* no hay solución: r(A)= 3 *)
```

```
{{α → -1}, {α → -1}}
```

    - Si $\alpha = -1$:

```
{MatrixRank[A /. α → -1], MatrixRank[AB /. α → -1]}
```

```
{1, 2}
```

Parámetros	***Naturaleza***	***Rangos***
$\boldsymbol{\alpha = 1}$	Compatible determinado	$r(A) = r(A\,|\,B) = 2 = n$
$\boldsymbol{\alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -1}$	Incompatible	$r(A) = 2 \neq r(A\,|\,B) = 3$
$\boldsymbol{\alpha = -1}$	Incompatible	$r(A) = 1 \neq r(A\,|\,B) = 2$

- c) Interprete geométricamente la solución obtenida cuando el sistema resulta compatible.
  - Se plantean las ecuaciones cartesianas del sistema cuando $\alpha = 1$:

```
α = 1; prod = A.X
```

```
{{x + y}, {x - 3 y}, {x + y}}
```

```
MatrixForm[prod]
```

$$\begin{pmatrix} x+y \\ x-3y \\ x+y \end{pmatrix}$$

```
sist = Table[prod[[i, 1]] == B[[i, 1]], {i, Length[B]}]
```

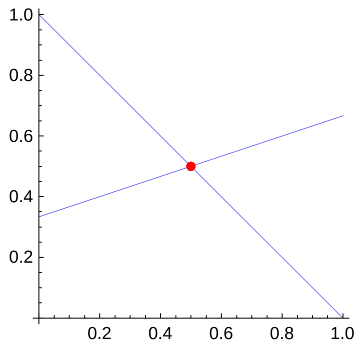
```
{x + y == 1, x - 3 y == -1, x + y == 1}
```

- Cada ecuación del sistema se interpreta geométricamente como una recta; la solución de dicho sistema se corresponde con su punto de intersección.
- Representación gráfica:

```
r1 = Line[{{0, 1}, {1, 0}}];
```

```
r2 = Line[{{0, 1/3}, {1, 2/3}}];
```

```
Graphics[{{Lighter[Blue, 0.5], r1, r2}, {Red, PointSize[0.03], Point[{1/2, 1/2}]}},
 Axes → True, AspectRatio → Automatic, ImageSize → Small]
```



Ejercicio nº4

Enunciado

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 7 \\ x + ay + z + t = b \\ x + 2ay + t = -1 \\ bx + ay = b \end{cases}$$

Clasifique y resuelva el sistema en función de los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$.

Resolución

- Como la matriz de coeficientes contiene parámetros reales ($a,b \in \mathbb{R}$), para resolver el sistema se usa la función **Reduce**:
  - La salida de la función muestra los valores de los parámetros para los que el sistema es compatible junto con la correspondiente solución.
  - Para aquellos valores $a,b \in \mathbb{R}$ no contemplados en los resultados obtenidos, el sistema resulta incompatible.

```
sis = {2 x + a y + z == 7, x + a y + z + t == b, x + 2 a y + t == -1, b x + a y == b};
```

```
Reduce[sis, {x, y, z, t}]
```

$$\left((b == 0 \,||\, b == 4)\ \&\&\ a == 0\ \&\&\ x == \frac{6-b}{2}\ \&\&\ z == 1+b\ \&\&\ t == \frac{1}{2}(-8+b)\right)\ ||$$
$$\left(-1+b \neq 0\ \&\&\ x == \frac{3(-2+b)}{2(-1+b)}\ \&\&\ a \neq 0\ \&\&\ y == \frac{6-b-2x}{2a}\ \&\&\ z == \frac{1}{2}(8+b-2x)\ \&\&\ t == -7+b+x\right)$$

- Discusión y resolución en los casos de compatibilidad
  - si $b \neq 1 \wedge a \neq 0$

$$\frac{6-b-2x}{2a}\ /.\ x \to \frac{3(-2+b)}{2(-1+b)}\ //\ \text{Simplify}$$

$$-\frac{(-4+b)\,b}{2a(-1+b)}$$

$$\frac{1}{2}(8+b-2x)\ /.\ x \to \frac{3(-2+b)}{2(-1+b)}\ //\ \text{Simplify}$$

$$\frac{-2+4b+b^2}{2(-1+b)}$$

$$-7+b+x\ /.\ x \to \frac{3(-2+b)}{2(-1+b)}\ //\ \text{Expand}\ //\ \text{Simplify}$$

$$\frac{8-13b+2b^2}{2(-1+b)}$$

Parámetros	***Naturaleza***	***Solución***
$(b=0 \vee b=4) \wedge a=0$	Compatible indeterminado	$\begin{cases} x = \frac{6-b}{2} \\ z = 1+b \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \\ t = \frac{b-8}{2} \end{cases}$
$b \neq 1 \wedge a \neq 0$	Compatible determinado	$\begin{cases} x = \frac{3(-2+b)}{2(-1+b)} \\ y = -\frac{(-4+b)\,b}{2a(-1+b)} \\ z = \frac{-2+4b+b^2}{2(-1+b)} \\ t = \frac{8-13b+2b^2}{2(-1+b)} \end{cases}$
$(b \neq 0 \wedge b \neq 4) \wedge a = 0$ $\vee$ $b = 1 \wedge a \neq 0$	Incompatible	$--$

- Rango de las matrices
  - Matriz de coeficientes del sistema

```
A = {{2, a, 1, 0}, {1, a, 1, 1}, {1, 2 a, 0, 1}, {b, a, 0, 0}}
```

```
{{2, a, 1, 0}, {1, a, 1, 1}, {1, 2 a, 0, 1}, {b, a, 0, 0}}
```

  - Matriz ampliada del sistema

```
AM = {{2, a, 1, 0, 7}, {1, a, 1, 1, b}, {1, 2 a, 0, 1, -1}, {b, a, 0, 0, b}}
```

```
{{2, a, 1, 0, 7}, {1, a, 1, 1, b}, {1, 2 a, 0, 1, -1}, {b, a, 0, 0, b}}
```

- Caso 1: $a = 0 \wedge (b = 0 \vee b = 4)$

```
{MatrixRank[A /. {b → 0, a → 0}], MatrixRank[AM /. {b → 0, a → 0}]}
```

```
{3, 3}
```

- Caso 2: $b \neq 1 \wedge a \neq 0$

```
Det[A] // Simplify (* en este caso: Det[A]≠0 ⇒ r(A)=4 *)
```

```
-2 a (-1 + b)
```

- Caso 3.1: $a = 0 \wedge (b \neq 0 \wedge b \neq 4)$

```
Det[A /. a → 0] // Simplify (* en este caso: Det[A]=0 ⇒ r(A)<4 *)
```

```
0
```

```
la = Flatten[Minors[A /. a → 0, 3]] // Simplify (* entonces: r(A)=3 *)
```

```
{0, 0, 2, 0, 0, 0, b, 0, 0, 0, b, 0, 0, 0, b, 0}
```

```
lam = Flatten[Minors[AM /. a → 0, 4]] // Simplify
```

```
{0, 0, 0, (-4 + b) b, 0}
```

```
solm = Solve[Table[lam[[i]] == 0, {i, Length[lam]}], b] (* en este caso: r(AM)=4 *)
```

```
{{b → 0}, {b → 4}}
```

- Caso 3.2: $b = 1 \wedge a \neq 0$

```
Det[A /. b → 1] // Simplify (* en este caso: Det[A]=0 ⇒ r(A)<4 *)
```

```
0
```

```
la2 = Flatten[Minors[A /. b → 1, 3]] // Simplify (* entonces: r(A)=3 *)
```

```
{-2 a, -2 a, 2, 2 a, -a, -a, 1, a, -a, -a, 1, a, -a, -a, 1, a}
```

```
lam2 = Flatten[Minors[AM /. b → 1, 4]] // Simplify (* entonces: r(AM)=4 *)
```

```
{0, 3 a, 3 a, -3, -3 a}
```

Parámetros	***Naturaleza***	***Rangos***
$(b = 0 \vee b = 4) \wedge a = 0$	Compatible indeterminado	$r(A) = r(A \mid B) = 3 < n$
$b \neq 1 \wedge a \neq 0$	Compatible determinado	$r(A) = r(A \mid B) = 4 = n$
$(b \neq 0 \wedge b \neq 4) \wedge a = 0$ $\vee$ $b = 1 \wedge a \neq 0$	*Incompatible*	$r(A) = 3 \neq r(A \mid B) = 4$

Ejercicio nº5

Enunciado

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a\,x - 2\,y + z = 1 \\ x + a\,y + 2\,z = a \\ x + z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasifique, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones usando el rango de la matriz de coeficientes, A, y el de la ampliada, AM.
- b) Resuelva el sistema de ecuaciones en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
- c) Interprete geométricamente la solución obtenida cuando el sistema resulta compatible indeterminado.

Resolución

- a) Clasifique, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones usando el rango de la matriz de coeficientes, A, y el de la ampliada, AM.
  - Se definen la matriz de coeficientes, A, y la matriz ampliada, AM:

```
Clear[A, AM, a]
```

```
A = {{a, -2, 1}, {1, a, 2}, {1, 0, 1}}; AM = {{a, -2, 1, 1}, {1, a, 2, a}, {1, 0, 1, 1}}
```

```
{{a, -2, 1, 1}, {1, a, 2, a}, {1, 0, 1, 1}}
```

  - Se calculan los valores $a \in \mathbb{R}$ que anulan el determinante de la matriz de coeficientes:

```
Solve[Det[A] == 0, a]
```

```
{{a → -1}, {a → 2}}
```

  - Caso 1: $a \neq -1 \wedge a \neq 2$

```
(* en este caso: Det[A]≠0 ⇒ r(A)=r(AM)=3 *)
```

  - Caso 2: $a = 2$

```
{MatrixRank[A /. a → 2], MatrixRank[AM /. a → 2]}
```

```
{2, 2}
```

  - Caso 3: $a = -1$

```
{MatrixRank[A /. a → -1], MatrixRank[AM /. a → -1]}
```

```
{2, 3}
```

Parámetros	*Naturaleza*	*Rangos*
$a \neq -1 \wedge a \neq 2$	Compatible determinado	$r(A) = r(AM) = 3 = n$
$a = 2$	Compatible indeterminado	$r(A) = r(AM) = 2 < n$
$a = -1$	Incompatible	$r(A) = 2 \neq r(AM) = 3$

- b) Resuelva el sistema de ecuaciones en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
  - Se vuelve a utilizar la función **Reduce** para resolver el sistema.

```
Reduce[A.{x, y, z} == {1, a, 1}, {x, y, z}]
```

$$\left(a == 2 \,\&\&\, y == \frac{x}{2} \,\&\&\, z == 1 - x\right) \,||\, \left((-2 + a)(1 + a) \neq 0 \,\&\&\, x == \frac{2}{1 + a} \,\&\&\, y == \frac{1}{2}(-1 + a)\, x \,\&\&\, z == 1 - x\right)$$

  - Caso 1: $a \neq -1 \wedge a \neq 2$

$$1 - x \,/.\, x \to \frac{2}{1 + a} \,//\, \text{Simplify}$$

$$\frac{-1 + a}{1 + a}$$

Parámetros	***Naturaleza***	***Solución***
$a \neq -1 \wedge a \neq 2$	Compatible determinado	$\begin{cases} x = \frac{2}{1+a} \\ y = \frac{a-1}{2} \\ z = \frac{a-1}{a+1} \end{cases}$
$a = 2$	Compatible indeterminado	$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ z = 1 - x \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$a = -1$	Incompatible	$--$

- c) Interprete geométricamente la solución obtenida cuando el sistema resulta compatible indeterminado.
  - Cada ecuación del sistema se interpreta geométricamente como un plano; las infinitas soluciones se corresponden con los puntos de la recta de intersección entre los tres planos.

```
B = {1, a, 1}; prod = A.{x, y, z}; a = 2;

sist = Table[prod[[i]] == B[[i]], {i, Length[B]}]

{2 x - 2 y + z == 1, x + 2 y + 2 z == 2, x + z == 1}
```

  - Representación gráfica:

```
p1 = InfinitePlane[{{1/2, 1/2, 1}, {2, 1, -1}, {0, 0, 1}}];

p2 = InfinitePlane[{{1, 0, 1/2}, {2, 1, -1}, {0, 0, 1}}];

p3 = InfinitePlane[{{0, 0, 1}, {2, 1, -1}, {0, 1, 1}}];

ls = Line[{{0, 0, 1}, {2, 1, -1}}];

Graphics3D[{Opacity[0.5], LightBlue, p1, p2, p3, {Thickness[0.02], Red, ls}},
 Boxed → True, Axes → True, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"}, Ticks → {{0, 1, 2}, {0, 1}, {-1, 0, 1}},
 BoxRatios → Automatic, ImageSize → Small, PlotRange → {{0, 1.5}, {-1, 1}, {0, 1}}]
```