

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Ejercicios resueltos

OCW 2018: Utilizando Mathematica como apoyo al cálculo algebraico en los grados de Ingeniería

Tema 1. Comenzando a trabajar

Equipo docente del curso

Martín Yagüe, Luis

Unzueta Inchaurre, Aitziber

Arrospide Zabala, Eneko

García Ramiro, María Begoña

Soto Merino, Juan Carlos

Alonso González, Erik

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

OCW
OpenCourseWare



EJERCICIOS RESUELTOS DEL TEMA 1. COMENZANDO A TRABAJAR

Ejercicio nº1

Enunciado

Calcule el valor del cociente :

$$\frac{\frac{21}{13} \cdot \frac{3}{14} + \left(\frac{4}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{12}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)}$$

- a) De forma exacta.
- b) Con ocho cifras decimales.

Resolución

- a) De forma exacta.
 - Introducción de la expresión asignándola a una variable; la evaluación devuelve el valor exacto en forma de cociente

`e1 = (21 / 13 * (3 / 14) + (4 / 3) ^ 3) / ((5 / 12) ^ 2 + 3 * 4 / 5)`

```

76 280
-----
72 267
  
```

- b) Con ocho cifras decimales.
 - Se utiliza la función **N[expr,n]**

`N[e1, 8]`

1.0555302

- La función introducida no devuelve los ocho decimales requeridos
- Debe tenerse en cuenta que el segundo argumento indica el número de cifras significativas, no el número de decimales, y a la izquierda del punto decimal hay una cifra significativa
- Respuesta correcta:

`N[e1, 9]`

1.05553019

Ejercicio nº2

Enunciado

Evalúe la siguiente expresión:

$$\frac{\log_{10}\left(\frac{12}{7}\right) + e^{\frac{9}{5}}}{\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{7}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

- a) Con seis cifras significativas.
- b) Con seis cifras decimales.

Resolución

- a) Con seis cifras significativas.
 - Introducción de la expresión asignándola a una variable

`e2 = (Log[10, 12 / 7] + E ^ (9 / 5)) / (Sin[-Pi / 7] + Sqrt[2 / 3]);`

- La función **N[expr,n]** devuelve el valor con seis cifras significativas por defecto (dos a la izquierda del punto decimal y cuatro decimales, en este caso)

`N[e2]`

16.4232

- b) Con seis cifras decimales.
 - Se utiliza la función **N[expr,n]**
 - Dado que hay dos cifras significativas a la izquierda del punto decimal y se requieren seis decimales:

`N[e2, 8]`

16.423209

Ejercicio nº3

Enunciado

Simplifique la expresión:
$$\frac{[(1 - 2x)(a - b) + ax^2 - bx^2](a + b)}{a^2 - b^2}$$

Resolución

- Se utiliza la función **Simplify[expr]**
- Los distintos niveles de anidamiento se realizan con paréntesis, nunca con corchetes:

`e3 = (a + b) * (((1 - 2 x) (a - b) + a * x ^ 2 - b * x ^ 2) / (a ^ 2 - b ^ 2));`

`Simplify[e3]`

`(-1 + x) ^ 2`

Ejercicio nº4

Enunciado

- a) Con la función **Table** cree una lista, *ang*, que contenga los valores de los ángulos entre 0 y 2π considerados cada $\frac{\pi}{3}$ radianes.
- b) Con ayuda de la función **Table** cree dos listas, denominadas *seno* y *coseno*, que contengan los valores de los senos y cosenos de los ángulos de la lista *ang*.
- c) Halle de dos formas diferentes los valores de las tangentes de los ángulos de *ang*.

Resolución

- a) Con la función **Table** cree una lista, *ang*, que contenga los valores de los ángulos entre 0 y 2π considerados cada $\frac{\pi}{3}$ radianes.

`ang = Table[i, {i, 0, 2 Pi, Pi/3}]`

$$\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$$

- b) Con ayuda de la función **Table** cree dos listas, denominadas *seno* y *coseno*, que contengan los valores de los senos y cosenos de los ángulos de la lista *ang*.

`seno = Table[Sin[ang[[i]]], {i, 1, Length[ang]}]`

$$\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right\}$$

`coseno = Table[Cos[ang[[i]]], {i, 1, Length[ang]}]`

$$\left\{1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

- c) Halle de dos formas diferentes los valores de las tangentes de los ángulos de *ang*.
 - Usando la función **Table** de forma análoga a como se hizo en el apartado anterior

`tangente = Table[Tan[ang[[i]]], {i, 1, Length[ang]}]`

$$\left\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\right\}$$

- Con los datos contenidos en las listas *seno* y *coseno*

`seno / coseno`

$$\left\{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0\right\}$$

Ejercicio n°5

Enunciado

Se consideran las funciones:
$$\begin{cases} f(x) = -2x^5 - 7x^2 + 6x - 10 \\ g(x) = 7x^3 - 4x - 15 \end{cases}$$

- a) Defínalas correctamente.
- b) Calcule los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.
- c) Representelas en el mismo gráfico en un intervalo que resulte adecuado para apreciar el dominio comprendido entre ambas gráficas.
- d) Calcule las raíces de $g'(x)$.
- e) Halle los puntos de corte de la gráfica de $g'(x)$ con el eje de ordenadas.
- f) Calcule el área del dominio limitado entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Resolución

- a) Definalas correctamente.
 - Definición de funciones de una variable, x .

$f[x_] = -2x^5 - 7x^2 + 6x - 10$;

$g[x_] = 7x^3 - 4x - 15$;

- b) Calcule los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.
 - Se usa la función **NSolve[expr,vars]** que aproxima las soluciones de la ecuación planteada (en este caso la función **Solve[expr,vars]** no puede resolver la ecuación)

$s = \text{NSolve}[f[x] == g[x], x]$ (* tres raíces reales y dos imaginarias *)

$\{\{x \rightarrow -1.2003\}, \{x \rightarrow -0.429292\}, \{x \rightarrow 0.329681 - 2.21176 i\}, \{x \rightarrow 0.329681 + 2.21176 i\}, \{x \rightarrow 0.970234\}\}$

- Obtención de los puntos de corte a partir de las soluciones reales obtenidas

$p1 = \{x /. s[[1]], f[x /. s[[1]]]\}$

$\{-1.2003, -22.304\}$

$p2 = \{x /. s[[2]], f[x /. s[[2]]]\}$

$\{-0.429292, -13.8366\}$

$p3 = \{x /. s[[5]], f[x /. s[[5]]]\}$

$\{0.970234, -12.4876\}$

Puntos de corte	
P_1	$(-1.2003, -22.304)$
P_2	$(-0.429292, -13.8366)$
P_3	$(0.970234, -12.4876)$

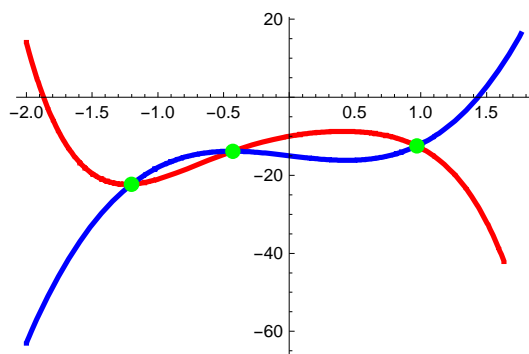
- c) Representélas en el mismo gráfico en un intervalo que resulte adecuado para apreciar el dominio comprendido entre ambas gráficas.
 - Los puntos de corte obtenidos permiten ajustar el intervalo de dibujo de la función **Plot[f, {x, x_{min} , x_{max} }, ...]**

$gf = \text{Plot}[f[x], \{x, -2, 2\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Red}, \text{Thickness}[0.010]\}];$

$gg = \text{Plot}[g[x], \{x, -2, 2\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Blue}, \text{Thickness}[0.010]\}];$

$pts1 = \text{Graphics}[\{\{\text{Green}, \text{PointSize}[0.03], \text{Point}[p1], \text{Point}[p2], \text{Point}[p3]\}, \text{Axes} \rightarrow \text{True}, \text{ImageSize} \rightarrow \text{Small}\};$

$\text{Show}[gf, gg, pts1, \text{AspectRatio} \rightarrow 2/3, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$



- d) Calcule las raíces de $g'(x)$.
 - Las raíces son los valores de la variable que anulan la función

```

g' = NSolve[g'[x] == 0, x]
{{x -> -0.436436}, {x -> 0.436436}}

```

Puntos de corte
$Q_1 (-0.436436, 0)$
$Q_2 (0.436436, 0)$

- e) Halle los puntos de corte de la gráfica de $g'(x)$ con el eje de ordenadas.

```

g'[0]
-4

```

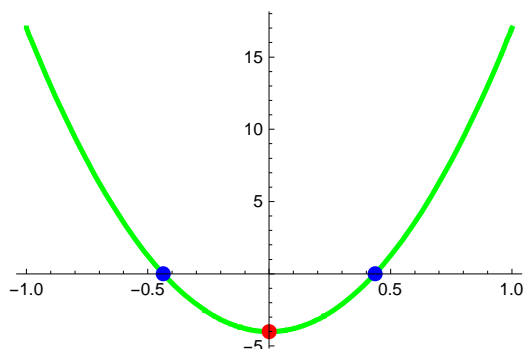
Punto de corte
$Q_3 (0, -4)$

- Representación gráfica

```

ggp = Plot[g'[x], {x, -1, 1}, PlotStyle -> {Green, Thickness[0.010]};
pts2 = Graphics[{Blue, PointSize[0.03], Point[{x, 0} /. pc[[1]]],
  Point[{x, 0} /. pc[[2]]], Red, PointSize[0.03], Point[{0, -4}]}, Axes -> True, ImageSize -> Small];
Show[ggp, pts2, AspectRatio -> 2/3, PlotRange -> All]

```



- f) Calcule el área del dominio limitado entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.
 - Función **Integrate**[$f, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \dots$]
 - El dominio se divide en dos partes que se calculan por separado

```

a1 = Integrate[g[x] - f[x], {x, x /. s[[1]], x /. s[[2]]}]
1.7098

```

```

a2 = Integrate[f[x] - g[x], {x, x /. s[[2]], x /. s[[5]]}]
6.69993

```

- El área del dominio se calcula sumando las áreas de los subdominios

```

area = a1 + a2
8.40973

```

- Solución: $\boxed{\text{Área} = 8.40973 \text{ u}^2}$

Ejercicio nº6

Enunciado

Se quiere obtener la edad media de los participantes inscritos a una prueba atlética en categoría senior (de 23 a 35 años).

- a) Genere una lista pseudoaleatoria, *edad*, con las edades de los 25 atletas participantes (valores enteros).
- b) Asigne a la variable *edadmedia* el valor medio de los elementos de la lista (con dos decimales).
- c) En el último momento, se acepta la inscripción de dos nuevos participantes cuyas edades son, respectivamente, 32 y 33 años; añádalos al final de la lista *edad*.
- d) Calcule la media de la nueva lista y compárela con la variable *edadmedia*. ¿Qué observa?
- e) Repita el ejercicio haciendo una asignación diferida en el apartado b. ¿Qué diferencias observa?

Resolución

- a) Genere una lista pseudoaleatoria, *edad*, con las edades de los 25 atletas participantes (valores enteros).

- Función **RandomInteger[range, n]**.

```
edad = RandomInteger[{23, 35}, 25]
```

```
{31, 26, 33, 26, 31, 29, 27, 33, 30, 31, 26, 29, 27, 24, 23, 30, 25, 35, 34, 28, 24, 24, 23, 31, 25}
```

- b) Asigne a la variable *edadmedia* el valor medio de los elementos de la lista (con dos decimales).

- Función **Mean[List1]**

```
edadmedia = N[Mean[edad], 4]
```

```
28.20
```

- c) En el último momento, se acepta la inscripción de dos nuevos participantes cuyas edades son, respectivamente, 32 y 33 años; añádalos al final de la lista *edad*.

- Función **Join[List1, List2]**.

```
edad2 = {32, 33}
```

```
{32, 33}
```

```
edad = Join[edad, edad2]
```

```
{31, 26, 33, 26, 31, 29, 27, 33, 30, 31, 26, 29, 27, 24, 23, 30, 25, 35, 34, 28, 24, 24, 23, 31, 25, 32, 33}
```

- d) Calcule la media de la nueva lista y compárela con la variable *edadmedia*. ¿Qué observa?

```
{edadmedia, N[Mean[edad], 4]}
```

```
{28.20, 28.52}
```

- Los valores no coinciden ya que a la variable *edadmedia* se le asignó el valor medio de los datos contenidos en la primera lista *edad*. Sin embargo, ahora, la media se calcula con la lista a la que se le han añadido los nuevos datos.

- e) Repita el ejercicio haciendo una asignación diferida en el apartado b. ¿Qué diferencias observa?

```
edad = RandomInteger[{23, 35}, 25]
```

```
{27, 24, 23, 32, 31, 24, 24, 35, 32, 32, 30, 29, 32, 35, 28, 23, 33, 25, 28, 30, 28, 35, 29, 33, 35}
```

```
edadmedia := N[Mean[edad], 4]
```

```
edad2 = {32, 33}
```

```
{32, 33}
```

```
In[41]= edad = Join[edad, edad2]
```

```
Out[41]= {27, 24, 23, 32, 31, 24, 24, 35, 32, 32, 30, 29, 32, 35, 28, 23, 33, 25, 28, 30, 28, 35, 29, 33, 35, 32, 33}
```

```
In[42]= {edadmedia, N[Mean[edad], 4]}
```

```
Out[42]= {29.70, 29.70}
```

- Los valores ahora coinciden ya que a la variable *edadmedia* se le realizó una asignación diferida con lo que al cambiar la lista se le reasignó el nuevo valor medio.