Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Ejercicios propuestos

OCW 2018: *Utilizando Mathematica como apoyo al cálculo algebraico en los grados de Ingeniería*

Enunciados

Equipo docente del curso
Martín Yagüe, Luis
Unzueta Inchaurbe, Aitziber
Arrospide Zabala, Eneko
García Ramiro, María Begoña
Soto Merino, Juan Carlos
Alonso González, Erik

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

EJERCICIOS DEL TEMA 1. COMENZANDO A TRABAJAR

Ejercicio nº1

Calcule el valor del cociente : $\dfrac{\frac{21}{13}\cdot\frac{3}{14}+\left(\frac{4}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{12}\right)^2+3\left(\frac{4}{5}\right)}$

- a) De forma exacta.
- b) Con ocho cifras decimales.

Ejercicio nº2

Evalúe la siguiente expresión: $\dfrac{log_{10}\left(\frac{12}{7}\right)+e^{\frac{9}{5}}}{sen\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\sqrt{\frac{2}{3}}}$

- a) Con seis cifras significativas.
- b) Con seis cifras decimales.

Ejercicio nº3

Simplifique la expresión: $\dfrac{\left[(1-2\,x)\,(a-b)+ax^2-bx^2\right]\,(a+b)}{a^2-b^2}$

Ejercicio nº4

- a) Con la función **`Table`** cree una lista, *ang*, que contenga los valores de los ángulos entre 0 y 2π considerados cada $\frac{\pi}{3}$ radianes.
- b) Con ayuda de la función **`Table`** cree dos listas, denominadas *seno* y *coseno*, que contengan los valores de los senos y cosenos de los ángulos de la lista *ang*.
- c) Halle de dos formas diferentes los valores de las tangentes de los ángulos de *ang*.

Ejercicio nº5

Se consideran las funciones: $\begin{cases} f(x) = & -2\,x^5 - 7\,x^2 + 6\,x - 10 \\ g(x) = & 7\,x^3 - 4\,x - 15 \end{cases}$

- a) Defínalas correctamente.
- b) Calcule los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.
- c) Represéntelas en el mismo gráfico en un intervalo que resulte adecuado para apreciar el dominio comprendido entre ambas gráficas.
- d) Calcule las raíces de $g'(x)$.
- e) Halle los puntos de corte de la gráfica de $g'(x)$ con el eje de ordenadas.
- f) Calcule el área del dominio limitado entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Ejercicio nº6

Se quiere obtener la edad media de los participantes inscritos a una prueba atlética en categoría senior (de 23 a 35 años).

- a) Genere una lista pseudoaleatoria, *edad*, con las edades de los 25 atletas participantes (valores enteros).
- b) Asigne a la variable *edadmedia* el valor medio de los elementos de la lista (con dos decimales).
- c) En el último momento, se acepta la inscripción de dos nuevos participantes cuyas edades son, respectivamente, 32 y 33 años; añádalos al final de la lista *edad*.
- d) Calcule la media de la nueva lista y compárela con la variable *edadmedia*. ¿Qué observa?
- e) Repita el ejercicio haciendo una asignación diferida en el apartado b. ¿Qué diferencias observa?

EJERCICIOS DEL TEMA 2. CÁLCULO MATRICIAL

Ejercicio nº1

Defina y presente en forma matricial:

- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$
- b) una matriz M_2 formada por ceros y unos obtenidos de forma aleatoria y tal que su producto con otra matriz $M_1 \in \mathbb{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ sea una matriz $P \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. (Nota. Función **`RandomInteger`**)
- c) una matriz columna con los cuatro primeros números naturales
- d) una matriz $M \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cuyos elementos coinciden con el número de la fila que ocupan en la matriz
- e) una matriz diagonal que tenga en su diagonal principal los cuatro primeros números naturales
- f) una matriz diagonal que tenga en su diagonal principal los elementos de la matriz M_2 del apartado b

Ejercicio nº2

Defina, de formas diferentes, tres matrices tales que $A, B \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $C \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. Determine:

- a) $2A - 3B$
- b) $C(2A - 3B)$
- c) si las matrices A y B conmutan
- d) el producto de las matrices A y C
- e) C^{T}
- f) que se verifica $(A+B)^{T} = B^{T} \cdot A^{T}$
- g) $det(A)$ y $det(B)$
- h) $A^{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- i) si las matrices A y B son regulares *y*, en caso afirmativo, calcular A^{-1} *y* B^{-1}

Ejercicio nº3

Defina una matriz $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})$.

Extraiga, de dos formas diferentes:

- a) la fila tres
- b) el elemento b_{25}
- c) la columna cuatro
- d) la submatriz $B_1 = \begin{pmatrix} b_{12} & b_{13} & b_{15} \\ b_{32} & b_{33} & b_{35} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

Determine:

- e) el rango de B, $r(B)$
- f) una matriz equivalente por filas a B

Ejercicio nº4

Hallar, en función de los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 1 & m & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº5

Sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Calcular : $\sum_{k=1}^{n} P^k \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

EJERCICIOS DEL TEMA 3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicio nº1

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x+z+t=1 \\ -x+3y-2z-3t=1 \\ 3x+2y+2z+2t=2 \end{cases}$$

- a) Obtenga y represente matricialmente la matriz de coeficientes, A.
- b) Calcule la inversa de A.
- c) Resuelva el sistema de ecuaciones haciendo uso del resultado del apartado anterior.

Ejercicio nº2

Clasifique y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio nº3

Clasifique y resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$x_1\,\overrightarrow{a_1}+x_2\,\overrightarrow{a_2}=\vec{b} \quad \text{donde} \begin{cases} \overrightarrow{a_1}=(1,\ \alpha,\ 1) \\ \overrightarrow{a_2}=(\alpha,\ -1-2\,\alpha,\ \alpha) \\ \vec{b}=(1,\ -1,\ \alpha) \end{cases}$$

- a) Clasifique el sistema de ecuaciones lineales en función de los diferentes valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$; resuélvalo cuando sea compatible.
- b) Halle los rangos de las matrices A y $A|B$, siendo A la matriz de coeficientes y $A|B$ la matriz ampliada del sistema; justifique con ellos la clasificación realizada.
- c) Interprete geométricamente la solución obtenida cuando el sistema resulta compatible.

Ejercicio nº4

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+ay+z=7 \\ x+ay+z+t=b \\ x+2ay+t=-1 \\ bx+ay=b \end{cases}$$

Clasifique y resuelva el sistema en función de los parámetros $a,b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio nº5

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a\,x - 2\,y + z = 1 \\ x + a\,y + 2\,z = a \\ x + z = 1 \end{cases}$$

- a) Clasifique, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el sistema de ecuaciones usando el rango de la matriz de coeficientes, A, y el de la ampliada, AM.
- b) Resuelva el sistema de ecuaciones en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
- c) Interprete geométricamente la solución obtenida cuando el sistema resulta compatible indeterminado.

EJERCICIOS DEL TEMA 4. ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSIÓN FINITA

Ejercicio nº1

Determine si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ son libres o ligados. En caso de ser ligados especifique una combinación lineal.

- a) $S = \{(1, 0, 2, 1), (0, 2, -1, -1), (2, 6, 1, -1)\}$
- b) $T = \{(1, 2, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (2, 1, 1, -1)\}$

Ejercicio nº2

Sea el subespacio vectorial $S = \mathcal{L}\left(\left\{2x^3 - x + 1, 2x^3 + 2x, -2x^3 + 4x - 2, -3x^3 + 6x - 3\right\}\right) \subset \mathbb{P}_3(x)$.

- a) Calcule una base de S.
- b) Obtenga unas ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio S.
- c) Determine si los polinomios $p(x) = x^2 + 2x$ y $q(x) = 3x - 1$ pertenecen al subespacio vectorial S.
- d) Calcule, si es posible, las coordenadas de los polinomios $p(x) = x^2 + 2x$ y $q(x) = 3x - 1$ utilizando la base obtenida en el primer apartado.

Ejercicio nº3

Sea el subespacio vectorial $S = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}\right\}\right) \subset \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

- a) Calcule una base de S.
- b) Obtenga unas ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio S.
- c) Sea el subespacio vectorial $T = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Big/ c = d \wedge b = 0\right\}$. Calcule $S \cap T$.

Ejercicio nº4

Sean $B_1 = \{(1, 0), (1, 2)\}$ y $B_2 = \{(0, 1), (-2, -1)\}$ dos bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$.

- a) Sea el vector $\vec{x} = (5, 6)$, calcule sus coordenadas en la base B_1.
- b) Sea el vector $\vec{x} = (5, 6)$ calcule sus coordenadas en la base B_2.
- c) Estudie la relación existente entre las coordenadas obtenidas en los apartados anteriores.

Ejercicio nº5

Sean los subespacios vectoriales $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, p(1) = p'(1) = 0\}$ y $T = \mathcal{L}\left(\left\{1 + x, x^2\right\}\right)$.

- a) Calcule una base de S.
- b) Calcule una base de T.
- c) Calcule $S + T$.
- d) Obtenga una base de $\mathbb{P}_3(x)$ completando la base de $S + T$.

EJERCICIOS DEL TEMA 5. TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN

Ejercicio nº1

Determine si los siguientes subconjuntos del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual, son ortogonales y/o ortonormales.

- a) $S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0, 1, 0)\right\}$
- b) $T = \left\{\left(0, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), 1\right), (-\cos(\pi), 0, 0), \left(0, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right), 0\right)\right\}$
- c) $U = \{(2, 1, 0), (1, -2, 0), (0, 0, 3)\}$

Ejercicio nº2

En el espacio vectorial euclídeo $\left(\mathbb{R}^3, <,>\right)$ se considera el producto escalar:

$$< \vec{x}, \vec{y} > = x_1 y_1 + x_3 y_1 + 3 x_2 y_2 + x_1 y_3 + 5 x_3 y_3 \text{ siendo } \vec{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$$

- a) Determine la norma del vector $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.
- b) Calcule la norma del vector $\vec{v}$ utilizando el producto escalar usual.
- c) Compare los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores.
- d) Obtenga la distancia entre los vectores $\vec{u} = (2, 0, -3)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 1)$.
- e) Calcule el ángulo que forman ambos vectores.

Ejercicio nº3

Sea espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{P}_2(x), <,>)$ con el producto escalar:

$$< p(x), q(x) > \; = p(-1)\, q(-1) + p(0)\, q(0) + p(1)\, q(1)$$

- a) Calcule el producto escalar entre $p(x) = 1 + x^2$ y $q(x) = x - 2$.
- b) Considere la base canónica de $\mathbb{P}_2(x)$ y obtenga la matriz de Gram.
- c) Calcule el producto escalar $<p(x),q(x)>$ mediante la matriz de Gram.

Ejercicio nº4

En el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R}), <,>)$ con el producto escalar usual se considera el subespacio vectorial $S = \left\{A \in \mathbb{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,/\, A^{T} = A\right\}$

- a) Calcule una base del subespacio S.
- b) Determine una base ortogonal del subespacio S.
- c) Obtenga una base ortonormal del subespacio S.
- d) Calcule la mejor aproximación de la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en el subespacio S y estime el error cometido.

Ejercicio nº5

En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual se considera el subespacio vectorial:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$$

- a) Obtenga el subespacio $S^\perp$ ortogonal a S.
- b) Represente gráficamente S y $S^\perp$ y deduzca el subespacio $S \cap S^\perp$.
- c) Obtenga el subespacio vectorial $S+S^\perp$.

Ejercicio nº6

En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

- a) Resuelva el sistema si es posible.
- b) Resuelva el sistema de forma aproximada (en el sentido de mínimos cuadrados).

Ejercicio nº7

Se considera el espacio vectorial euclídeo, $(C[0,1], \bullet)$, de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ con el producto escalar usual:

$$\forall f(x), g(x) \in C[0, 1]: \; f(x) \bullet g(x) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$$

Aproxime, estimando el error cometido, la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0,1]$ mediante un polinomio:

- a) de grado dos.
- b) de grado tres.

EJERCICIOS DEL TEMA 6. ANÁLISIS ESPECTRAL

Ejercicio nº1

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times3}$.

- a) Calcule el polinomio característico.
- b) Utilice el polinomio característico para calcular el espectro de la matriz A.
- c) Obtenga el subespacio asociado al valor propio doble.
- d) Determine si la matriz A es diagonalizable por semejanza .

Ejercicio nº2

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{4\times4}$.

- a) Demuestre que A es diagonalizable ortogonalmente, calculando la matriz P y D tal que $D = P^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot P$
- b) Calcule una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios ortonormales de A.
- c) Compruebe que la matriz A verifica el teorema de Cayley-Hamilton.

Ejercicio nº3

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 2m-n & 0 & 2m-2n \\ 1 & m & 2 \\ -m+n & 0 & -m+2n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times3}$.

- a) Determine para qué valores de m y n la matriz A es diagonalizable.
- b) Cuando la matriz A sea diagonalizable calcule las matrices D y P tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Ejercicio nº4

Sea una matriz $A \in \mathbb{M}_{3\times3}$ tal que $V(1) = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio propio correspondiente al valor propio $\lambda_1 = m$.

Además se cumple que $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

- a) Justifique que la matriz es diagonalizable.
- b) Calcule la matriz A.