

eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

## Guía docente del curso

# *OCW 2018: Utilizando Mathematica como apoyo al cálculo algebraico en los grados de Ingeniería*

---

### **Equipo docente del curso**

*Martín Yagüe, Luis*

*Unzueta Inchaurre, Aitziber*

*Arrospide Zabala, Eneko*

*García Ramiro, María Begoña*

*Soto Merino, Juan Carlos*

*Alonso González, Erik*

Departamento de Matemática Aplicada  
Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I

**OCW**  
Open Courseware



## INTRODUCCIÓN

Una de las habilidades que se espera en cualquier ingeniero es una rápida y eficiente capacidad para efectuar cálculos. La resolución de ejercicios de Álgebra supone la realización de cálculos simbólicos y numéricos que pueden ser fuente de errores. Existen diversos Sistemas de Computación Algebraica (CAS, en inglés, de *Computer Algebraic Systems*) que permiten realizarlos de una forma veloz y sin más posibilidad de error que una incorrecta introducción de los datos.

En una sociedad en la que el conocimiento es cada vez más necesario y se tiene al alcance una gran cantidad de información se hace preciso disponer de herramientas que liberen al usuario de los procesos de cálculo (sin perderlos de vista) para concentrarse en su adecuada interpretación. Sin embargo, el paso previo implica comprender y dominar una buena herramienta de cálculo. Por otra parte, conocer y dominar una herramienta ampliamente utilizada en el mundo proporciona valor añadido a la formación personal.

El Álgebra permite, entre otras cosas: proporcionar herramientas para representar muchos sistemas reales, abordar la resolución de ecuaciones diferenciales desde un enfoque matricial, analizar las propiedades de los sistemas lineales (controlabilidad, observabilidad, estabilidad, robustez, etc.), aproximar sistemas complicados mediante aproximaciones más sencillas (que se pueden ir completando de modo gradual para añadir efectos adicionales observados en el sistema real), analizar y estudiar la convergencia de la resolución de sistemas de ecuaciones en función de la información que contienen, buscar caminos alternativos para resolver un problema dado, optimizar problemas en función de diversas funciones de coste prefijadas, etc.

En este curso se utiliza el programa *Mathematica*. Es una herramienta CAS desarrollada por *Wolfram Research Inc.*, ampliamente empleada tanto en docencia como en investigación. El uso de *Mathematica* debe entenderse como una herramienta de apoyo en la resolución de ejercicios de los diferentes temas que componen el programa de este curso. En consecuencia, se podrá enfocar más en la discusión de los resultados alcanzados y en su coherencia que sobre los cálculos en sí mismos.

## PERSONAS DESTINATARIAS Y PRERREQUISITOS

El curso está destinado a quienes desean utilizar una herramienta matemática para agilizar los cálculos algebraicos implicados en la resolución de una tarea. Así, se podrá acelerar el proceso de adquisición de contenidos al tiempo que se podrán relacionar los resultados obtenidos con los resultados teóricos esperados de una manera más eficaz. En consecuencia, es necesario que la persona que acceda a este curso disponga de los correspondientes conocimientos teóricos de Álgebra para comprender los resultados que se produzcan y esté en condiciones óptimas de trabajar con la información algebraica pertinente.

## COMPETENCIAS QUE SE ABORDAN

El enfoque del Espacio Europeo de Enseñanza Superior basado en competencias se ha venido asentando con el paso del tiempo en cuatro pilares fundamentales:

- aprender a conocer (saber)

- aprender a hacer (saber explicar)
- aprender a vivir juntos (saber mostrar)
- aprender a ser (actuar)

Esto se refleja en la importancia que se deberá dar al adecuado desarrollo de las competencias transversales del alumnado en relación con las exigencias de los empresarios.

La guía docente de este curso se basa en resultados de aprendizaje, de modo que las actividades que se proponen están diseñadas y planificadas para que vayan introduciendo y guiando al alumnado de una manera gradual en las dificultades de cada una de las unidades temáticas y de las técnicas de trabajo. Al mismo tiempo, el pensamiento que está detrás de dicho diseño es servir de acicate para que el estudiante se mantenga en un alto nivel y pueda alcanzar los resultados de aprendizaje previstos. Por otra parte, las ventajas del autoaprendizaje son bien conocidas en el desarrollo de competencias. El uso de herramientas matemáticas también ayuda al alumnado a concentrarse en la interpretación de los resultados obtenidos y a centrarse en la comprensión de las metodologías implicadas.

Se desea que las personas que atiendan el curso adquieran una serie de competencias que le permitan tener capacidad de:

- C1** obtener conocimientos de informática relativos al ámbito del Álgebra para gestionar la información de manera eficiente tanto cuantitativa como cualitativamente para usar la abstracción en el modelado de sistemas
- C2** visualizar e interpretar los resultados obtenidos
- C3** organizar los datos y planificar un método algebraico (directo o iterativo) de resolución de problemas del área
- C4** razonar de forma crítica para implementar labores de análisis y síntesis en entornos algebraicos usando la argumentación lógica en la toma de decisiones
- C5** potenciar el aprendizaje autónomo de la persona para adaptarse a entornos cambiantes

## OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Para alcanzar dichas competencias se usarán los recursos propuestos para potenciar los siguientes resultados concretos de aprendizaje:

- (C1|a1)** Conocer las funciones básicas de la aplicación informática para trabajar los métodos algebraicos, tanto directos como iterativos.
- (C1|a2)** Aprender las herramientas de programación necesarias para usar la programación vectorial frente a la secuencial.
- (C2|b1)** Conocer las funciones más interesantes para realizar representaciones gráficas en función de las necesidades específicas de los datos disponibles y de las soluciones obtenidas.

- (C3|c1) Conocer los objetos disponibles en la aplicación informática para representar de forma óptima la información existente.
- (C3|c2) Usar las fuentes de información de la herramienta informática para buscar las funciones más apropiadas.
- (C4|d1) Comparar los resultados obtenidos con los datos de partida para discriminar su consistencia dando, si es preciso, el error que se comete.
- (C4|d2) Analizar las diferencias en términos de tiempos de ejecución entre una programación vectorial y una secuencial para resolver un cierto proyecto.
- (C5|e1) Analizar el conocimiento que ha alcanzado cada usuario del curso en función de las estimaciones previstas en cada una de las unidades.

## DOCENTES AUTORES/AS DE LA MATERIA

El equipo docente que ha diseñado y elaborado este curso se presenta en la siguiente relación:

Apellidos y nombre	Categoría
Martín Yagüe, Luis	Profesorado Titular de Escuela Universitaria (Doctor)
Unzueta Inchaurre, Aitziber	Profesorado Adjunto (Ayudante Doctora)
Arrospide Zabala, Eneko	Profesorado Laboral Interino Universidad
García Ramiro, María Begoña	Profesorado Adjunto (Ayudante Doctora)
Soto Merino, Juan Carlos	Profesorado Titular de Universidad
Alonso González, Erik	Profesorado Adjunto (Ayudante Doctor)

Todos los profesores y profesoras citados pertenecen al Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU) e imparten docencia en la Escuela de Ingeniería de Bilbao, Edificio II-I (EIB, II-I).

## DESCRIPCIÓN DEL CURSO

El curso está pensado para ser realizado en doce semanas, de manera que cada tema implicado tenga una duración de dos semanas con la siguiente estructura: en la primera semana, se estudian los contenidos correspondientes, y en la segunda se trabajan dichos contenidos de manera específica con ejercicios resueltos en *Mathematica* y realizando las pruebas previstas para contrastar el nivel alcanzado. En tales condiciones, las sesiones semanales prevén una duración de cinco horas en la primera semana y de seis en la segunda (de las cuales una corresponderá a la autoevaluación).

Tanto la parte teórica como la parte práctica va de lo sencillo a lo más complejo de una manera gradual. Así se mostrará en el cronograma del curso que se acompaña posteriormente. La estructura de los temas y la disposición del curso en la plataforma OCW son, en sí mismos, una ayuda para que cada persona organice su tiempo de estudio según sus necesidades concretas del momento. Evidentemente, cada persona puede disponer de su tiempo como mejor estime conveniente para llegar a alcanzar los resultados de aprendizaje previstos y seguir el itinerario que mejor estime oportuno.

## PROGRAMA Y CONTENIDOS

Las unidades temáticas que se abordan en este curso son:

### TEMA 1: COMENZANDO A TRABAJAR CON MATHEMATICA

- Las principales prestaciones de *Mathematica*
- Conceptos básicos y sintaxis
- Las paletas
- Identificadores, operadores y expresiones
- Funciones del programa
- Funciones del usuario
- Cálculo simbólico
- Representación gráfica en 2D y 3D

### TEMA 2: CÁLCULO MATRICIAL

- Las listas: creación y funciones disponibles
- Las matrices y los vectores
- Operaciones con matrices
- El rango de una matriz
- Matrices con parámetros

### TEMA 3: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Resolución de sistemas sin parámetros
- Resolución de sistemas con parámetros
- Interpretación geométrica

### TEMA 4: ESPACIOS VECTORIALES DE DIMENSIÓN FINITA

- Operaciones con vectores
- Operaciones con polinomios
- Concepto algebraico de vector
- Subespacios vectoriales: combinaciones lineales
- Sistemas generadores
- Sistemas libres y sistemas ligados
- Obtención de bases de un subespacio vectorial: coordenadas de un vector en una base
- Operaciones con subespacios vectoriales: inclusión, intersección, unión, suma y suma directa
- Dimensión de un subespacio vectorial y rango de una familia de vectores
- Matriz de cambio de base

## TEMA 5: TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN

Declaración de un producto escalar  
Norma de un vector, distancia entre dos vectores y ángulo de dos vectores  
Matriz de Gram de un producto escalar en una base de un espacio vectorial de dimensión finita  
Algoritmo de ortogonalización de Gram-Schmidt  
Generación de sistemas ortogonales y ortonormales  
Complemento ortogonal de un subespacio vectorial  
Proyección de un vector sobre un subespacio vectorial  
Suma de Fourier  
Aproximación discreta y aproximación continua  
Resolución aproximada de sistemas incompatibles en el sentido de mínimos cuadrados

## TEMA 6: ANÁLISIS ESPECTRAL

Vector propio y valor propio asociado a una matriz cuadrada  
Espectro de una matriz cuadrada  
Subespacios propios asociados a un valor propio  
Mapa espectral de una matriz cuadrada  
Base de vectores propios  
Condiciones de diagonalizabilidad  
Diagonalización por semejanza  
Diagonalización ortogonal  
Teorema de Cayley-Hamilton

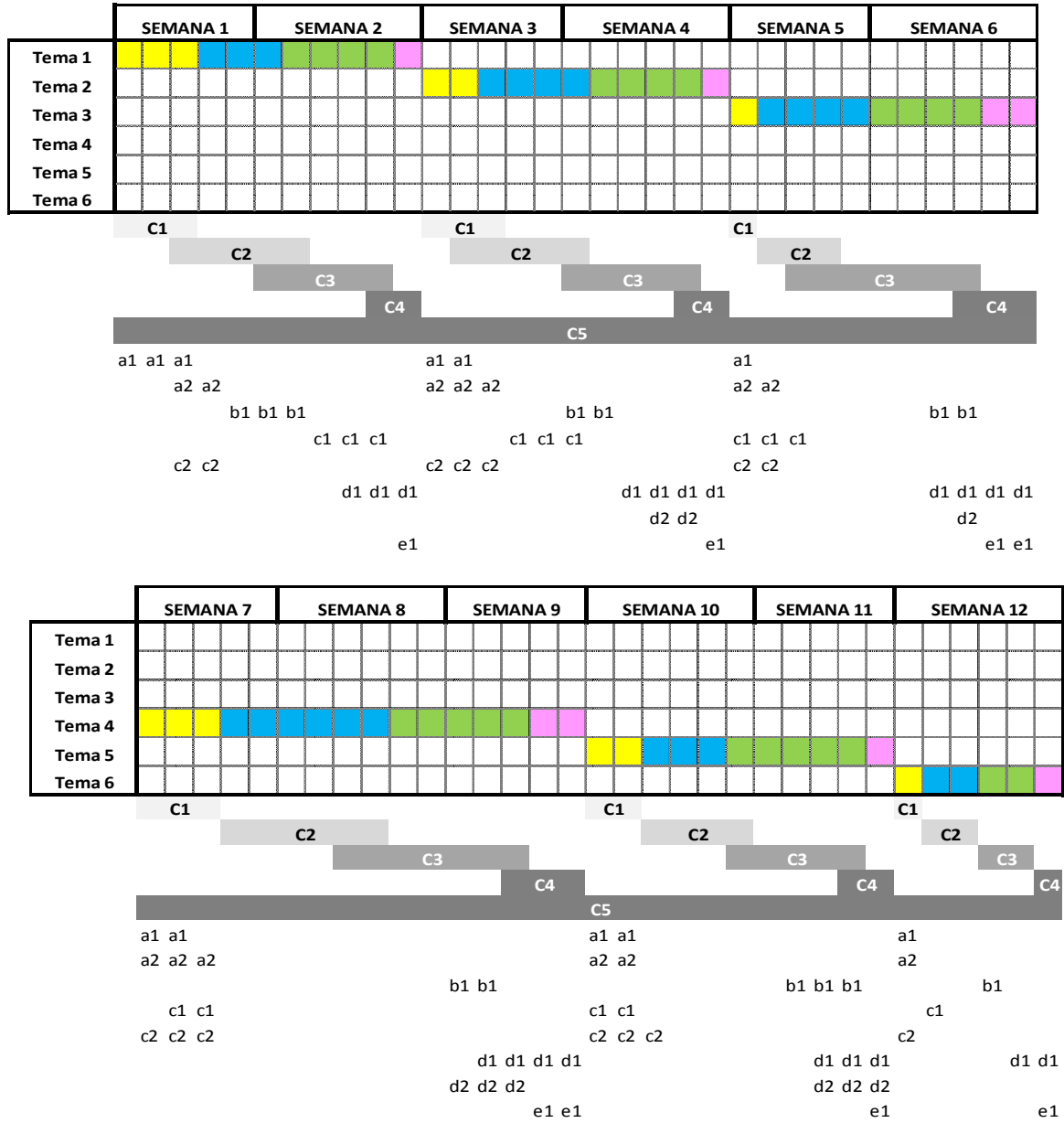
## METODOLOGÍA PARA EL ESTUDIO

El curso está pensado para personas que tienen conocimientos de Álgebra y que necesitan de una herramienta para mejorar sus habilidades de razonamiento cuantitativo y cualitativo con un enfoque algebraico. En la documentación del curso se han utilizado las versiones 11.2 y 11.3 del programa *Mathematica*. Además, todos los materiales generados se han obtenido como documentos e imágenes procedentes del trabajo del profesorado del curso con dicho programa. En consecuencia, la persona que acceda a este curso deberá disponer de dicha herramienta. Dado que la UPV/EHU posee licencia corporativa, los miembros de la comunidad universitaria pueden instalar el programa en sus ordenadores. Para ello se facilita un tutorial tanto en vídeo como en fichero de texto.

La manera de trabajar ideal sería progresar desde el comienzo al final, si bien cada tema se puede abordar de manera independiente según el interés y los conocimientos algebraicos de cada persona. De cualquiera de las maneras es obligatorio seguir un orden: contenidos teóricos, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos y, por último, la autoevaluación.

Se proporcionan las respuestas de los ejercicios para contrastar el nivel alcanzado en cada sesión de trabajo. Con todo, el primer tema deberá ser el punto de partida de cualquier itinerario que se aborde.

El siguiente cronograma (la unidad de trabajo es la hora, y el color indica la actividad prevista: amarillo, contenidos teóricos; azul, ejercicios resueltos; verde, ejercicios previstos; rosa, autoevaluación) resume la filosofía mencionada:



Además, se muestran las competencias que se trabajan y los resultados de aprendizaje previstos.