EJERCICIO 1

Trazar por el punto $P=(5,3,2)$ una recta perpendicular al plano que contiene a los puntos $(7,0,0)$ y $(4,3,0)$ y es perpendicular al plano XOY. Hallar su punto de intersección.

<u>*Solución:*</u>

Se calcula la ecuación implícita del plano α, plano que contiene los puntos $(7,0,0)$ y $(4,3,0)$, utilizando para ello un punto y dos vectores pertenecientes al mismo.

Por ejemplo, el vector $\vec{u}=(7,0,0)-(4,3,0)=(3,-3,0)$ es un vector del plano, además, como α es perpendicular al plano XOY, el vector $(0,0,1)$ también pertenece a dicho plano. Por lo que la ecuación implícita de α se obtiene resolviendo la siguiente ecuación:

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-7 & 0 & 3 \\ y & 0 & -3 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha: x+y=7$$

De esta ecuación se puede determinar $\vec{n}=(1,1,0)$ que el vector normal al plano.

Por otro lado, la recta r que se desea obtener es perpendicular al plano α por lo que el vector director de la misma será $\vec{n}=(1,1,0)$. Además, como se sabe que la recta pasa por el punto $P=(5,3,2)$ se calculan las ecuaciones paramétricas:

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-5=y-3 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x-y=2 \\ z=2 \end{cases}$$

Se calcula la intersección pedida:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ z=2 \\ x+y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ y=\dfrac{5}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

La intersección entre la recta r y el plano α es el punto $\left(\frac{9}{2},\frac{5}{2},0\right)$

EJERCICIO 2

Trazar por P(8,5,4) un plano perpendicular a la recta que contiene a los puntos (7,2,0) y (0,2,6). Hallar su punto de intersección.

<u>*Solución*</u>

Sea r la recta que contiene los puntos dados. El vector director de esta recta es: $\vec{v}_r = (7,2,0) - (0,2,6) = (7,0,-6)$.

El vector normal del plano π será paralelo al vector director de la recta r:

$$\vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{n}_\pi = (7,0,-6)$$

Por lo que $\pi: 7x + 0y - 6z + k = 0$.

Se determina el parámetro k, exigiendo que el plano π contenga el punto $P(8,5,4)$:

$$7 \cdot 8 - 6 \cdot 4 + k = 0 \Rightarrow k = -32$$

El plano π viene dado por la siguiente ecuación:

$$\pi: 7x - 6z - 32 = 0$$

Para calcular la intersección con la recta r con el plano π, se escriben las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$r: \begin{cases} x = 7 + 7\lambda \\ y = 2 \\ z = -6\lambda \end{cases}$$

Se plantea $r \cap \pi$, sustituyendo un punto genérico $(x, y, z) \in r$ en el plano:

$$7(7 + 7\lambda) + 36\lambda - 32 = 0 \Rightarrow 49 + 49\lambda + 36\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Y el punto de corte resulta: $Q\left(\frac{28}{5}, 2, \frac{42}{5}\right)$.

EJERCICIO 3

Calcular una recta que pasando por el punto $P=(12,3,6)$, corte y sea perpendicular a la recta $r\colon \frac{x-6}{-6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{3}$. Hallar también el punto de intersección entre ambas.

<u>Solución</u>

Se define el plano π que pasa por el punto P y cuyo vector asociado o normal es el vector director de la recta r:

$$\pi\colon -6(x-12)+3(y-3)+3(z-6)=0 \;\Rightarrow\; \pi\colon -2x+y+z+15=0$$

A partir de la ecuación continua de la recta se obtienen sus ecuaciones paramétricas:

$$\frac{x-6}{-6}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{3}=\lambda \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=6-6\lambda \\ y=5+3\lambda \\ z=4+3\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación del plano, se calcula el punto Q, intersección entre el plano π y la recta r:

$$-2(6-6\,\lambda)+1(5+3\lambda)+1(4+3\lambda)+15=0 \;\Rightarrow \lambda=-2/3$$

$$\begin{cases} x=6-6\,(-2/3) \\ y=5+3\,(-2/3) \\ z=4+3\,(-2/3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow Q=(10,3,2)$$

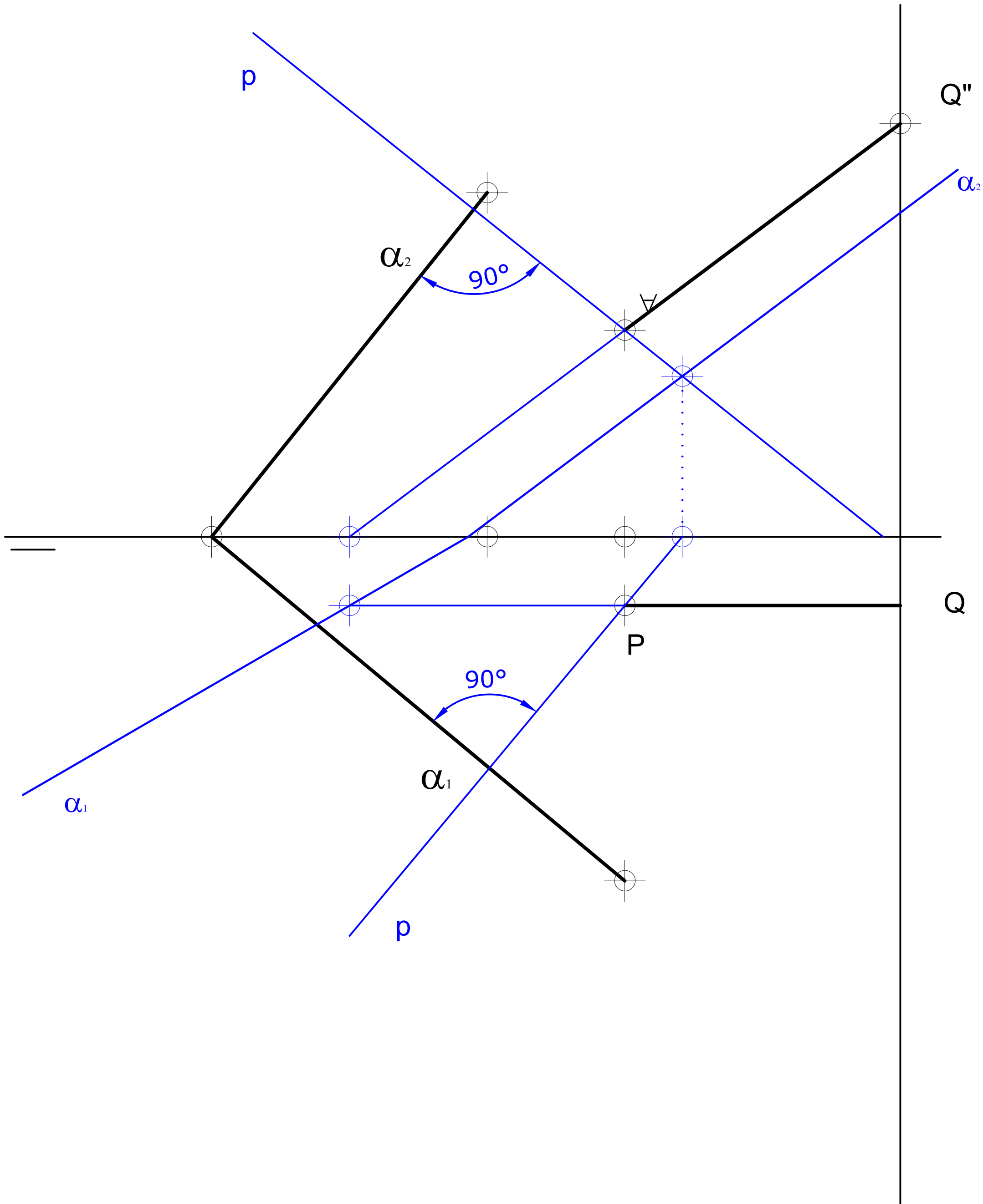
La perpendicular solicitada es la recta que pasa por los puntos P y Q:

$$p\colon \begin{cases} \mathrm{y}=3 \\ 2\mathrm{x}-\mathrm{z}=18 \end{cases}$$

4 ARIKETA

Trazar por $r(P(4,1,3), Q(0,1,6))$ *planos perpendiculares a* $\alpha((10,0,0),(6,0,5),(4,5,0))$.

Draw from the points P and Q perpendicular planes to the plane α.



BY NC SA
OpenCourseWare

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López y Aitziber Unzueta Inchaurbe

EJERCICIO 4

Trazar por $r\big(P(4,1,3), Q(0,1,6)\big)$ *planos perpendiculares a* $\alpha\big((10,0,0),(6,0,5),(4,5,0)\big)$.

<u>*Solución:*</u>

Para trazar por la recta r planos perpendiculares al plano α se deben realizar los siguientes pasos:

- Calcular la ecuación de la recta r:

Utilizando el punto Q y el vector director $\vec{u} = Q - P = (-4,0,3)$, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$r:\ \begin{cases} x = 0 - 4\lambda \\ y = 1 \\ z = 6 + 3\lambda \end{cases}$$

Siendo su ecuación implícita:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{4} = \dfrac{z-6}{3} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow\ r:\ \begin{cases} 3x - 4z = 24 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Calcular el haz de planos que contiene a la recta r:

Los planos que contienen la recta r tienen la expresión

$$(y-1) + \lambda(3x + 4z - 24) = 0 \Rightarrow 3\lambda x + y + 4\lambda z - 24\lambda - 1 = 0$$

- Calcular el vector normal al plano α:

Multiplicando dos vectores directores del plano vectorialmente, por ejemplo, multiplicando los vectores, $(6,0,5) - (10,0,0) = (-4,0,5)$ y $(4,5,0) - (10,0,0) = (-6,5,0)$ se obtiene que:

$$\vec{n}_\alpha = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 5 \\ -6 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -25\vec{i} - 30\vec{j} - 20\vec{k}$$

Por lo que el vector normal al plano α es $\vec{n} = (5,6,4)$.

- Calcular los planos perpendiculares a α que contiene la recta r:

Si los planos deben ser perpendiculares a α, el vector asociado a ellos debe ser perpendicular a $\vec{n}_\alpha$, es decir:

BY NC SA
OpenCourseWare