# Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# *ESTABLECIMIENTO DE LA ECUACION DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACION DE EULER. HIPÓTESIS SIMPLIFICATORIAS.*

Partimos de:

$$\vec{M} = \vec{\nabla} U + \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \left(\vec{v} \wedge rot\, \vec{v}\right) = 0$$

Hipótesis ya consideradas:

- Fluido perfecto (μ=0).
- Campo gravitatorio.

- Flujo irrotacional $\longrightarrow$ $rot\, \vec{v} = 0$

$$\vec{M} = \vec{\nabla}(g \cdot z + \frac{v^2}{2}) + \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$$

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# *ESTABLECIMIENTO DE LA ECUACION DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACION DE EULER. HIPÓTESIS SIMPLIFICATORIAS.*

Proyectamos ese vector M sobre una dirección s cualquiera:

$$\vec{M}_s = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial s}\cdot\vec{s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(g\cdot z+\frac{v^2}{2}\right)\cdot\vec{s}+\frac{\partial\vec{v_s}}{\partial t}=0$$

Multiplicamos por $\vec{\partial s}$:

$$\vec{M}_s\cdot\vec{\partial s} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial s}\cdot\vec{s}\cdot\vec{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(g\cdot z+\frac{v^2}{2}\right)\cdot\vec{s}\cdot\vec{\partial s}+\frac{\partial\vec{v_s}}{\partial t}\cdot\vec{\partial s}=0$$

$$\text{Siendo}: \vec{s}\cdot\vec{\partial s}=1\cdot\partial s\cdot\cos 0=\partial s$$

$$\vec{M}_s\cdot\vec{\partial s} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial s}\cdot\partial s+\frac{\partial}{\partial s}\left(g\cdot z+\frac{v^2}{2}\right)\cdot\partial s+\frac{\partial\vec{v_s}}{\partial t}\cdot\vec{\partial s}=0$$

$$\vec{M}_s\cdot\vec{\partial s} = \frac{1}{\rho}\cdot dP+d\left(g\cdot z+\frac{v^2}{2}\right)+\frac{\partial\vec{v_s}}{\partial t}\cdot\vec{\partial s}=0$$

$$\int_A^B \frac{1}{\rho}\cdot dP+\int_A^B d\left(g\cdot z+\frac{v^2}{2}\right)+\int_B^B\frac{\partial\vec{v_s}}{\partial t}\cdot\vec{\partial s}=K(s,t)$$

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

## *ESTABLECIMIENTO DE LA ECUACION DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACION DE EULER. HIPÓTESIS SIMPLIFICATORIAS.*

- Flujo permanente:

$$\frac{\partial \vec{v_s}}{\partial t} = 0$$

$$\int_A^B \frac{1}{\rho} \cdot dP + (g \cdot z + \frac{v^2}{2}) = K(s)$$

- Flujo incompresible:

$$\frac{1}{\rho} \cdot P + (g \cdot z + \frac{v^2}{2}) = K(s)$$

$$\frac{P_A}{\rho} + g \cdot z_A + \frac{v_A^{\,2}}{2} = \frac{P_B}{\rho} + g \cdot z_B + \frac{v_B^{\,2}}{2}$$

**Ecuación de Bernoulli** ó Ecuación de conservación de la energía

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# ESTABLECIMIENTO DE LA ECUACION DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACION DE EULER. HIPÓTESIS SIMPLIFICATORIAS.

La misma demostración de otra forma. Partimos de:

$$\vec{R} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P + \nu \cdot \nabla^2 \vec{v} = \vec{a}$$

1ª Hipótesis: Fluido perfecto (μ=0).

$$\vec{R} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{a}$$

2ª Hipótesis: Campo gravitatorio.

$$\vec{R} = -\vec{\nabla} U$$

$$-\vec{\nabla} U - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P = \vec{a}$$

3ª Hipótesis: Aplicada a una misma línea de corriente (s).

$$\vec{v} = \vec{v}(s,t)$$

$$\vec{a} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \cdot v$$

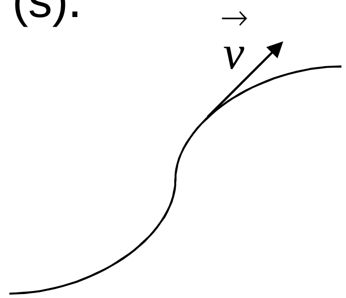


Fig. 10.1 Línea de corriente

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# *ESTABLECIMIENTO DE LA ECUACION DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACION DE EULER. HIPÓTESIS SIMPLIFICATORIAS.*

La proyección del vector sobre la dirección s de la línea de corriente:

$$-\vec{\nabla}U - \frac{1}{\rho}\cdot\vec{\nabla}P = \vec{a}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\cdot v$$

4ª Hipótesis: Flujo permanente.

$$-\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s}\cdot v$$

$$-\frac{d(g\cdot z)}{ds} - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{dP}{ds} = \frac{dv}{ds}\cdot v$$

$$-d(g\cdot z) - \frac{1}{\rho}\cdot dP = v\cdot dv$$

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

## *ESTABLECIMIENTO DE LA ECUACION DE BERNOULLI A PARTIR DE LA ECUACION DE EULER. HIPÓTESIS SIMPLIFICATORIAS.*

5ª Hipótesis: Flujo incompresible. Integramos la ecuación:

$$\boxed{g \cdot z + P/\rho + \frac{v^2}{2} = cte}$$

# Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

## *INTERPRETACIÓN FÍSICA Y CONDICIONES DE VALIDEZ DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

$$P/\rho + g \cdot z + \frac{v^2}{2} = K(s)$$

$$P/\gamma + z + \frac{v^2}{2 \cdot g} = K'(s)$$

$$P + \gamma \cdot z + \rho \cdot \frac{v^2}{2} = K''(s)$$

La ecuación de Bernoulli se aplica a flujos incompresibles y permanentes, sin fricción, siendo K(s) diferente para cada línea de corriente.

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# *INTERPRETACIÓN FÍSICA Y CONDICIONES DE VALIDEZ DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

$$P/\rho = \frac{[F]\cdot[L]^3}{[M]\cdot[L]^2} = \frac{[F]\cdot[L]}{[M]} = \frac{\text{Energía}}{\text{Masa}} \left( \mathrm{J}/\mathrm{Kg} \right)$$

$$P/\gamma = \frac{[F]\cdot[L]^3}{[F]\cdot[L]^2} = \frac{[F]\cdot[L]}{[F]} = \frac{\text{Energía}}{\text{Peso}} \left( \mathrm{J}/\mathrm{N} \right)$$

$$P = \frac{[F]\cdot[L]^3}{[L]^3\cdot[L]^2} = \frac{[F]\cdot[L]}{[L]^3} = \frac{\text{Energía}}{\text{Volumen}} \left( \mathrm{J}/\mathrm{m}^3 \right)$$

# *INTERPRETACIÓN FÍSICA Y CONDICIONES DE VALIDEZ DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

Energía de presión (Presión estática) → $P/\gamma = z_P$

Energía potencial, geodésica, de cota, de posición → $z$

Energía cinética, de velocidad (Presión dinámica) → $v^2/2\cdot g = z_v$

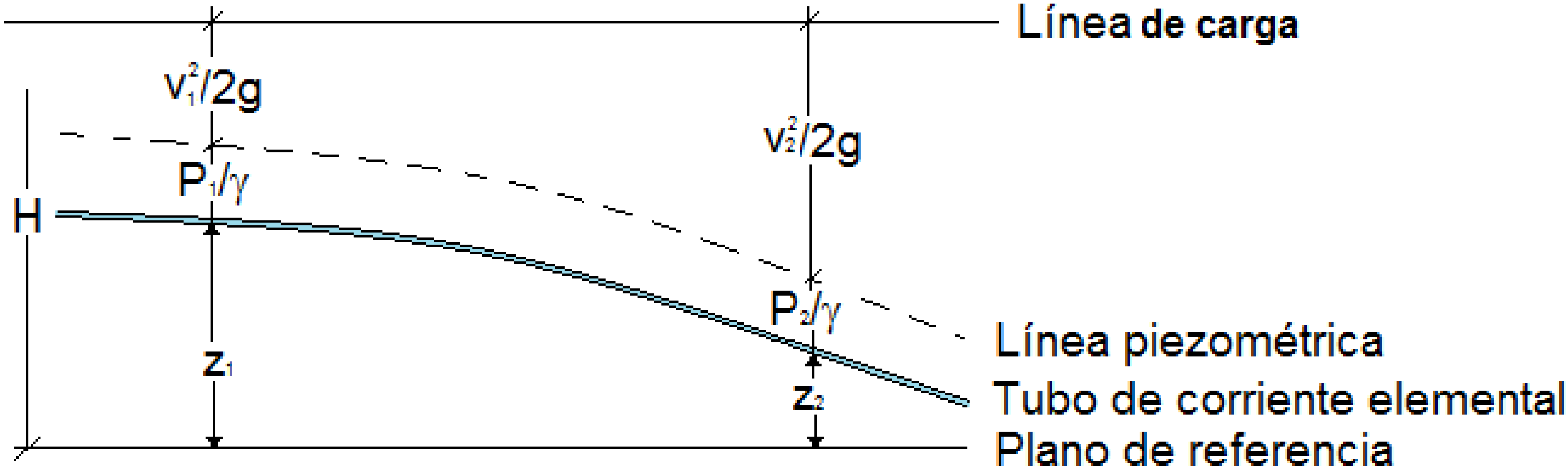


Fig. 10.2 Representación de líneas de carga y piezométricas de un conducto

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

## MODIFICACIÓN DE LA HIPÓTESIS BAJO LAS QUE SE ESTABLECIÓ LA ECUACIÓN DE BERNOULLI. ECUACIÓN DE BERNOULLI GENERALIZADA.

- En el caso de líneas de corriente cuya procedencia sea un depósito con superficie libre, la constante de Bernoulli no cambiará de una línea de corriente a otra.

- En el caso de gases, si la variación es pequeña (2-3% de la Presión absoluta), como $P=\rho\cdot R\cdot T$, las variaciones de $\rho$ serán pequeñas, por lo que se considera ese gas como incompresible. Ejemplo: ventiladores.

- Si las variaciones de flujo con respecto al tiempo son pequeñas, a pesar de ser un flujo no permanente, se podrá aplicar la ecuación de Bernoulli. Ejemplo: vacíado de depósitos.

- Flujo real ($\mu\neq 0$). La viscosidad genera esfuerzos cortantes y por ello pérdidas mecánicas o pérdidas de energía.

$$B_1 = B_2 + h_{f_{1\to 2}}$$

$$h_{f_{1\to 2}} = k\cdot\frac{v^2}{2\cdot g}$$

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

## MODIFICACIÓN DE LA HIPÓTESIS BAJO LAS QUE SE ESTABLECIÓ LA ECUACIÓN DE BERNOULLI. ECUACIÓN DE BERNOULLI GENERALIZADA.

Aportación de energía en bombas:

$B_1+h_m=B_2$

$h_m$=Altura manométrica

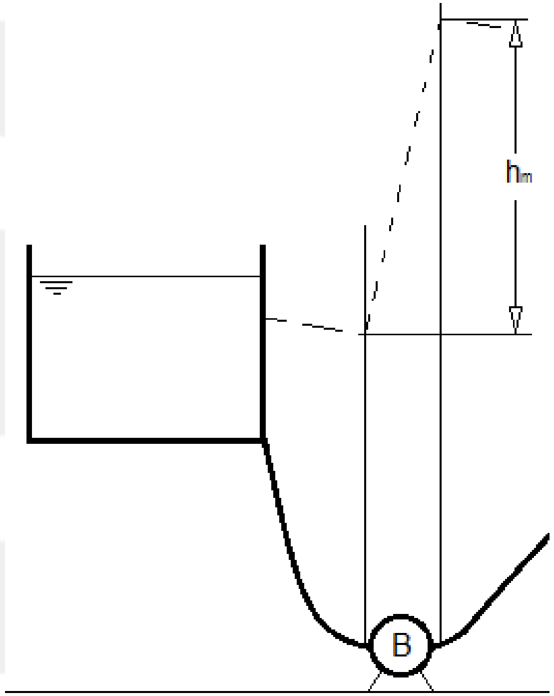


Fig. 10.3 Representación de la línea piezómetrica para una bomba

Aportación de energía en turbinas:

$B_1=B_2+h_n$

$h_n$=Altura neta ($H_T$)

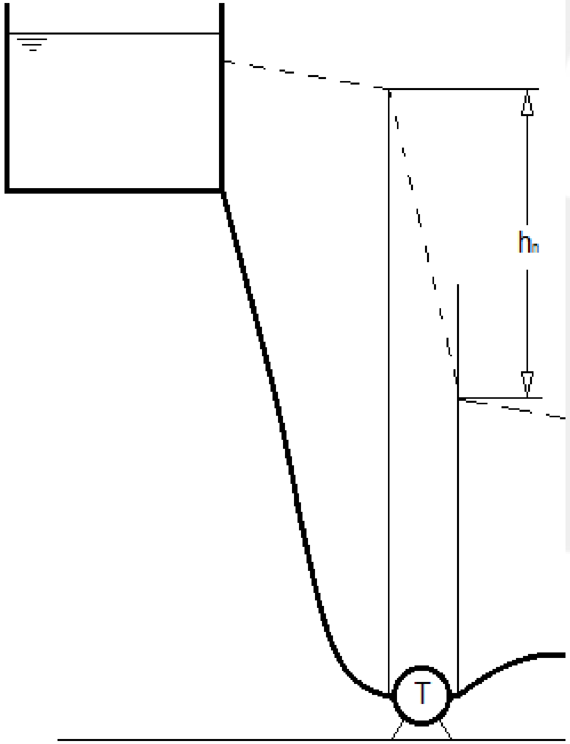


Fig. 10.4 Representación de la línea piezómetrica para una turbina

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# MODIFICACIÓN DE LA HIPÓTESIS BAJO LAS QUE SE ESTABLECIÓ LA ECUACIÓN DE BERNOULLI. ECUACIÓN DE BERNOULLI GENERALIZADA.

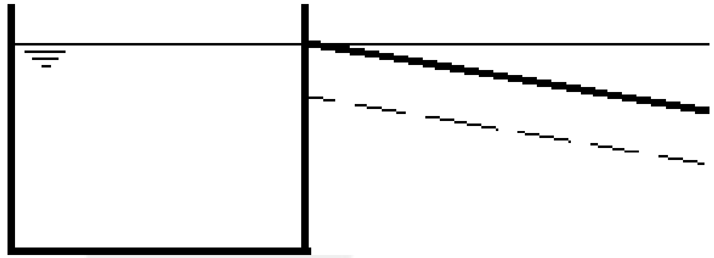

Fig. 10.5 Representación de la línea piezométrica para pérdidas de carga por conducción

$$B_1 = B_2 + h_{f_{1\to 2}}$$

$$h_{f_{1\to 2}} = K \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

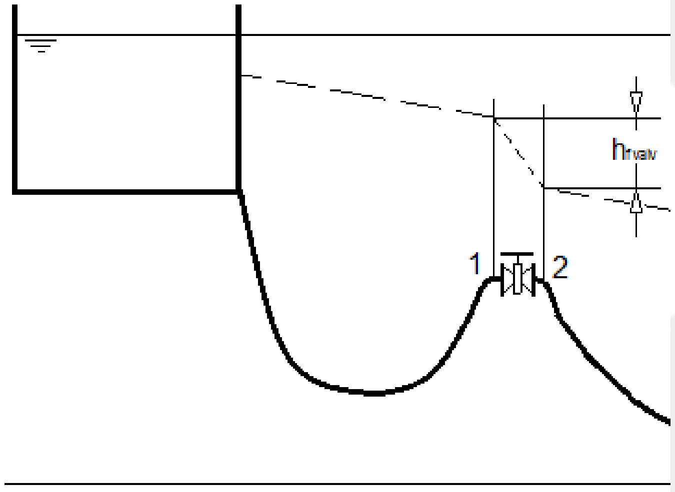


Fig. 10.6 Representación de la línea piezométrica para pérdidas de carga por obstáculos como válvulas y codos

$$B_1 = B_2 + h_{f_{1\to 2}}$$

$$h_{f_{1\to 2}} = H_v = K_v \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# MODIFICACIÓN DE LA HIPÓTESIS BAJO LAS QUE SE ESTABLECIÓ LA ECUACIÓN DE BERNOULLI. ECUACIÓN DE BERNOULLI GENERALIZADA.

La potencia de una bomba o turbina se define como la energía que intercambia con el fluido que pasa través de ese elemento por unidad de tiempo. Si la energía aportada incrementa la altura equivalente en z, W=$\dot{m}\cdot g\cdot z$, entonces:

$$W = \dot{m}\cdot g\cdot z = \rho\cdot Q\cdot g\cdot z = \gamma\cdot Q\cdot z$$

Si $W_{MB}$ y $W_{MT}$ son las potencias mecánicas que se ha de aplicar a la bomba y que produce la turbina respectivamente, los rendimientos de esas máquinas se definen como:

$$\eta_B = \frac{W_B}{W_{MB}} \qquad \eta_T = \frac{W_{MT}}{W_T}$$

$W_B = \gamma\cdot Q\cdot h_m$ es la potencia suministrada por la bomba al fluido, también llamada potencia hidráulica y $W_T = \gamma\cdot Q\cdot h_n$ la potencia hidráulica que el agua cede a la turbina.

## Tema 10: Ecuación de Bernoulli.

# *INTERPRETACIÓN FÍSICA Y CONDICIONES DE VALIDEZ DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

Tomando como la más empleada :

$$B = P/\gamma + z + \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow P = \frac{\text{Energía}}{\text{Peso}} \cdot \frac{\text{Peso}}{\text{Volumen}} \cdot \frac{\text{Volumen}}{\text{tiempo}} = B \cdot \gamma \cdot Q$$

En el caso de un chorro :

$$\mathrm{B} = \frac{v^2}{2 \cdot g} \Rightarrow P = \gamma \cdot Q \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

En el caso de una energía sólo debida a la presión :

$$\mathrm{B} = P/\gamma \Rightarrow P = \gamma \cdot Q \cdot P/\gamma = P \cdot Q$$

Potencia perdida o disipada :

$$\mathrm{P} = \gamma \cdot Q \cdot h_{f_{1\rightarrow 2}}$$