Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

INTRODUCCIÓN. CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN FLUIDO.

En el estudio de la Mecánica de Fluidos se suelen considerar tres tipos principales de fuerzas:

- **Fuerzas superficiales**: son aquellas que actúan sobre las fronteras del medio a través del contacto directo. El ejemplo principal de estas fuerzas es la *presión*.

- **Fuerzas volumétricas**: son fuerzas que se distribuyen sobre el volumen del fluido y actúan sin contacto físico. Ejemplo de estas fuerzas son las *fuerzas gravitacionales* y electromagnéticas.

- **Fuerzas interiores**. Son las fuerzas que ejercen las partículas interiores de fluido entre sí.

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

INTRODUCCIÓN. CLASIFICACIÓN DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN FLUIDO.

Las fuerzas que se aplican sobre una superficie tiene tres componentes:

- La componente perpendicular a la superficie donde se aplica o *componente normal* generalmente representada como σ, y que da lugar a esfuerzos de compresión o tracción.

- Las *componentes tangenciales* a la superficie, y que se aplican en el plano de la propia superficie, siendo generalmente representadas como τ. Estas fuerzas provocan deslizamiento o deformación de la propia superficie sobre la que se aplican. Son dos componentes, al ser la superficie una entidad de dos dimensiones.

Las fuerzas volumétricas están debidas al efecto de campos externos, como son el gravitacional o el electromagnético, y vendrán definidas por las leyes de esos campos. Son fuerzas que tienen carácter vectorial y, por tanto, también se pueden descomponer en tres componentes, aunque generalmente el sistema de referencia se adopta de tal forma que sólo sea no nula una de esas componentes.

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

PRESIÓN EN UN PUNTO DEL FLUIDO. PRINCIPIO DE ISOTROPÍA DE LAS PRESIONES.

La presión promedio se define como la fuerza normal que empuja contra una superficie plana dividida por la magnitud de dicha área.

$$P = \frac{F_n}{S}$$

La presión en un punto es el límite de esa relación a medida que el área de aplicación de esa fuerza normal se aproxima a cero centrada en ese punto.

$$p_i = \lim_{\delta A_i \to 0} \frac{F_n}{\delta A_i}$$

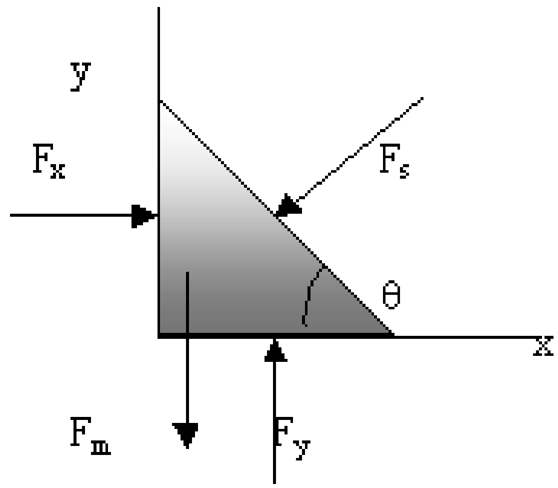
Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

PRESIÓN EN UN PUNTO DEL FLUIDO. PRINCIPIO DE ISOTROPÍA DE LAS PRESIONES.

El principio de isotropía establece que: ***En un punto, un fluido en reposo tiene la misma presión en todas las direcciones*.**

- Para demostrar esto vamos a considerar un cuerpo libre pequeño en forma de cuña, con espesor igual a dz, situado en un punto (x, y) de un fluido en reposo. Sobre este cuerpo sólo actúan las **fuerzas de superficies normales y la fuerza de la gravedad**, puesto que al estar en reposo no actúan fuerzas de fricción cortantes con el fluido que le rodea.

- El ángulo θ es arbitrario, con lo que esta relación se cumple para cualquier dirección sobre un punto dentro de un fluido estático.



$$p_x = p_y = p_s$$

Fig. 3.1 Fuerzas sobre una cuña de ángulo θ

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

PRESIÓN EN UN PUNTO DEL FLUIDO. PRINCIPIO DE ISOTROPÍA DE LAS PRESIONES.

En este contexto, se tiene:

- La fuerza de la gravedad,

$$F_m = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} = \frac{\gamma \cdot \delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2}$$

- y las fuerzas sobre las superficies de la cuña debidas a las presiones:

$$F_x = p_x \cdot \delta y \cdot \delta z$$

$$F_y = p_y \cdot \delta x \cdot \delta z$$

$$\vec{F}_s = p_s \cdot (sen\theta \cdot \vec{i} + \cos\theta \cdot \vec{j}) \cdot \delta S \cdot \delta z$$

PRESIÓN EN UN PUNTO DEL FLUIDO. PRINCIPIO DE ISOTROPÍA DE LAS PRESIONES.

De esta forma aplicando las ecuaciones de movimiento en los ejes de análisis bidimensional, se tiene:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\sum F_x = p_x \cdot \delta y \cdot \delta z - p_s \cdot \delta z \cdot \delta s \cdot sen\theta = \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} \cdot \rho \cdot a_x = 0$$

$$\sum F_y = p_y \cdot \delta x \cdot \delta z - p_s \cdot \delta z \cdot \delta s \cdot \cos\theta - \gamma \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} = \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} \cdot \rho \cdot a_y = 0$$

En donde, al estar el fluido en reposo y al no moverse la cuña, se cumple que la aceleración a la que se ve sometida es nula, por lo que la suma de las fuerzas tanto en la dirección x, como en la y, es cero. Haciendo uso de las relaciones trigonométricas que relacionan el ángulo θ con los lados de la cuña, se tiene:

$$\delta x = \delta s \cdot \cos\theta$$

$$\delta y = \delta s \cdot sen\theta$$

PRESIÓN EN UN PUNTO DEL FLUIDO. PRINCIPIO DE ISOTROPÍA DE LAS PRESIONES.

Y las expresiones anteriores se simplifican, resultando:

$$p_x \cdot \delta y \cdot \delta z - p_s \cdot \delta y \cdot \delta z = 0$$

$$p_y \cdot \delta x \cdot \delta z - p_s \cdot \delta x \cdot \delta z - \gamma \frac{\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z}{2} = 0$$

que al tomar el límite a cero, y despreciando el término derivado de las fuerzas de gravedad, al ser un infinitesimal de segundo orden, se cumple la relación:

$$p_x = p_y = p_s$$

El ángulo θ es arbitrario, con lo que esta relación se cumple para cualquier dirección sobre un punto dentro de un fluido estático.

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

El objetivo es determinar el campo de presiones dentro de un fluido en reposo. Se considera un elemento de fluido con forma de cubo, cuyas caras sean paralelas a los ejes de un sistema de referencia. Será un elemento diferencial de masa dm, de lados dx, dy y dz, como se muestra en la figura. Las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido en reposo son las fuerzas superficiales y las fuerzas volumétricas.

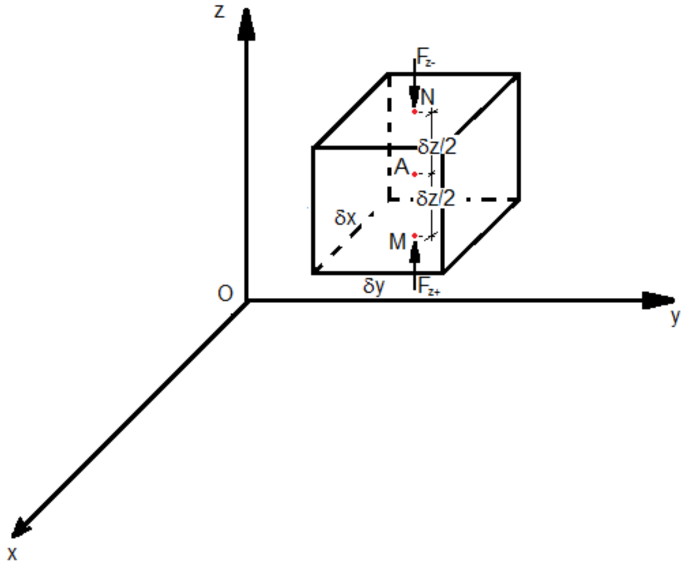


Fig. 3.2 Fuerzas superficiales en el eje vertical sobre un cubo diferencial

Punto A (x, y, z)
Presión = p = f(x,y,z)

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

Considerando el elemento anterior, las fuerzas superficiales, debidas a la presión que soporta el volumen de fluido se expresan como:

$$F_{z-} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{2} \right) \partial x \cdot \partial y$$

$$F_{z+} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{2} \right) \partial x \cdot \partial y$$

en la que *p* es la presión en el centro (x, y, z) del volumen y *dp/dz* su variación en la dirección de *z*, *dz/2* es la distancia desde el centro del volumen a la cara normal en la que se aplica la fuerza.

$$Entre\, M\, y\, N\, (dx = 0, dy = 0)$$

$$\Rightarrow Fz = -\frac{\partial p}{\partial z} dz dx dy \Rightarrow dp = -\frac{\partial p}{\partial z} dz$$

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

Análogamente para el resto de ejes:

$$(dy=0, dz=0)\ dp=-\frac{\partial p}{\partial x}dx;$$

$$(dx=0, dz=0)\ dp=-\frac{\partial p}{\partial y}dy$$

Las fuerzas (R) que actúan sobre el elemento de fluido por unidad de masa se expresan como:

$$\vec{R}\cdot dm=\vec{R}\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz=$$

$$R_X\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot\vec{i}+R_Y\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot\vec{j}+R_Z\cdot\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot\vec{k}$$

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

Sumando esas fuerzas en la dirección *z*, se obtiene:

$$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + R_Z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Para las direcciones de los otros dos ejes cartesianos, en la que no actúan las fuerzas de cuerpo, se tiene:

$$dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + R_X \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + R_Y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

El vector de la fuerza que actúa en el volumen del fluido, queda:

$$d\vec{F} = \vec{i} \cdot dF_x + \vec{j} \cdot dF_y + k \cdot dF_z =$$

$$-\left(i\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \vec{R} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

Esta fuerza debe igualarse a cero en un líquido en reposo, ya que las partículas de éste no deforman al no existir movimiento relativo dentro del fluido. Teniendo en cuenta el operador nabla, que representa el gradiente de una magnitud escalar, se obtiene que el gradiente de *p* da lugar al campo vectorial de las fuerzas de presión superficial por unidad de volumen:

$$d\vec{F} = -\left(i\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \vec{R} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} P}$$

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

La ecuación de la estática para el caso en que las fuerzas de volumen derivan de un potencial (U).

$$U = \frac{E_p}{m} = g \cdot z$$

$$\overrightarrow{grad}\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = g\ \vec{k}$$

$$Peso = -m \cdot g\ \vec{k} \Rightarrow \vec{R} = -g\ \vec{k} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{\nabla} \cdot U$$

$$\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{\nabla} \cdot U$$

Sustituyendo en la ecuación general de la estática:

$$-\vec{\nabla} \cdot U = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \cdot P$$

Tema 3: Leyes generales de la estática de los fluidos.

CONSECUENCIAS DE LA ESTÁTICA DE FLUIDOS.

- Superficies equipotenciales (U=cte) son isobáricas.
- Superficies equipotenciales (U=cte) son equidensas.
- Superficies equipotenciales (U=cte) son isotérmicas.