Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Introducción a la Teoría de Códigos

M.A. García, L. Martínez, T. Ramírez

Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV/EHU

Ejercicios y Problemas propuestos
Tema 2: NOCIONES BÁSICAS DE LA TEORÍA DE CÓDIGOS

Mayo de 2017

Ejercicios Propuestos: Nociones básicas de la Teoría de Códigos

1. $*$ Estudiar si las siguientes tuplas corresponden a un código EAN:

   (a) 9783540283713
   (b) 8412345678914
   (c) 9783662479735

2. $*$ Determinar el valor de "a" para que las siguientes tuplas correspondan a un código EAN:

   (a) 843a554161836
   (b) 4325351455a52
   (c) 978421345667a

3. Determinar la distancia mínima del código EAN. Deducir cuántos errores detecta y corrige. Probar que el código detecta la transposición de dos dígitos consecutivos, es decir, del cambio de la palabra $a_0 \dots a_i a_{i+1} \dots a_{12}$ del código por $a_0 \dots a_{i+1} a_i \dots a_{12}$, con $i \in \{0, \dots, 11\}$.

4. $*$ Sea C un código un código de bloque sobre $\mathbb{F}_q$ de longitud n. Se llama **polinomio enumerador de pesos** de C al polinomio

   $$W_C(x,y) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i y^{n-i}, \quad \text{siendo } a_i = |\{c \in C \,|\, w(c) = i\}|.$$

   Calcular $W_C(x,y)$ para los siguientes códigos:

   (a) $\{aa \dots a \,|\, a \in \mathbb{F}_q\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ (Código de repetición)
   (b) $\{x_1 \dots x_n \,|\, x_i \in \mathbb{F}_q, i = 1, \dots, n, x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\}$ (Código de paridad)

5. $*$ Sea $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ un alfabeto, $T_n = \{x_1 \dots x_n \,|\, x_i \in A, i = 1, \dots, n\}$ y $d : T_n \times T_n \to \{0, 1, 2, \dots, n\}$ la aplicación definida por

   $$d(x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) = |\{i \in \{1, \dots, n\} \,|\, x_i \neq y_i\}|,$$

   para todo $x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n \in T_n$. Demostrar que d es una distancia.

6. $*$ Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$. Se define

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n),$$

donde $\mathbf{x} = x_1 \ldots x_n$ e $\mathbf{y} = y_1 \ldots y_n$. Demostrar que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{y}) - 2w(\mathbf{x} \cap \mathbf{y})$, donde $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es la distancia de Hamming de las palabras $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ y $w(\mathbf{z})$ es el peso de la palabra $\mathbf{z} \in \mathbb{F}_2^n$.

7. Sea $C \subseteq T_n$ un código de longitud n sobre el alfabeto $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ con distancia mínima d. Demostrar que si $\mathbf{c}, \mathbf{c}' \in C$ son dos palabras distintas de C, entonces $\overline{B}(\mathbf{c}, \left[\frac{d-1}{2}\right]) \cap \overline{B}(\mathbf{c}', \left[\frac{d-1}{2}\right]) = \emptyset$.

8. $*$ Sea $C \subseteq T_n$ un código de bloque de longitud n sobre un alfabeto A con distancia mínima d. Demostrar que C es perfecto si y, solo si, $\dot{\bigcup}_{\mathbf{c} \in C} \overline{B}(\mathbf{c}, \left[\frac{d-1}{2}\right]) = T_n$

9. Demostrar que no existen códigos perfectos de longitud n sobre un alfabeto A con distancia mínima par.

10. Sea A un alfabeto, $T_n = \{a_1 ... a_n \mid a_i \in A, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ y $C \subseteq T_n$ un código de bloque de longitud n con distancia mínima d sobre el alfabeto A.

    (a) Demostrar que si $g : A \to A$ es una aplicación biyectiva y $\psi_{g,i} : T_n \to T_n$ está definida por $\psi_{g,i}(a_1 \ldots a_n) = a_1 \ldots a_{i-1} g(a_i) a_{i+1} \ldots a_n$, entonces $\psi_{g,i}(C)$ es un código equivalente a C con la misma distancia mínima que C.

    (b) Sea $1 \leq i < j \leq n$. Si $\phi_{i,j} : T_n \to T_n$ es la aplicación definida por $\phi_{ij}(a_1 \ldots a_n) = (a_1 \ldots a_{i-1} a_j a_{i+1} \ldots a_{j-1} a_i a_{j+1} \ldots a_n)$. Probar que $\phi_{ij}(C)$ es un código equivalente a C con la misma distancia mínima que C.

    (c) Demostrar que si $C' \subseteq T_n$ es un código equivalente a C, entonces la distancia mínima de C', denotada por $d(C')$, coincide con la distancia mínima de C.