Introducción a la Teoría de Códigos

M.A. García, L. Martínez, T. Ramírez

Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV/EHU

Ejercicios y Problemas propuestos

Tema 1: PRELIMINARES SOBRE ÁLGEBRA LINEAL

Mayo de 2017

Ejercicios Propuestos: Preliminares sobre Álgebra Lineal

1. $*$ Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Demostrar que
$$K^n = \{(k_1, \ldots, k_n) | k_i \in K, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$
con la suma definida por: para cualesquiera $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
y la multiplicación por un escalar:
$$\forall \lambda \in K, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n, \;\; \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$
es un K-espacio vectorial.

2. $*$ Estudiar si los siguientes conjuntos son $\mathbb{F}_q$-subespacios vectoriales de $\mathbb{F}_q^n$ y determinar su dimensión.
   (a) $\{aa \ldots a | a \in \mathbb{F}_q\} \subseteq \mathbb{F}_q^n$.
   (b) $\{x_1 \ldots x_n | x_i \in \mathbb{F}_q, i = 1, \ldots, n, x_n = \sum_{i=1}^{n-1} x_i\}$.

3. $*$ Demostrar que el conjunto
$$\mathcal{B} = \{(1_K, 0_K, \ldots, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, \ldots, 0_K), \ldots, (0_K, \ldots, 0_K, 1_K)\}$$
es una base de K^n. ¿Cuál es la dimensión de K^n?

4. $*$ Sea S el subespacio vectorial de $\mathbb{F}_2^7$ definido por
$$S =< 1101000, 0110100, 0011010, 0001101 >$$
   (a) Halla una base de S y la dimensión de S.
   (b) Estudia si la palabra $\mathbf{x} = 1000110$ pertenece a S y, en caso de que esté, calcula las coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base calculada en el apartado anterior.

5. Estudiar si el conjunto
$$\begin{aligned} S \;\; = \{&0000000, 0110100, 0011010, 0001101,\\ &1000110, 1001011, 1011100, 0010111,\\ &1010001, 1110010, 0111001, 1111111,\\ &0101110, 1101000, 0100011, 1100101\} \end{aligned}$$
es un $\mathbb{F}_2$-subespacio vectorial de $\mathbb{F}_2^7$. En caso de que lo sea, calcula la dimensión de S.