Introducción a la Teoría de Códigos

M.A.García, L. Martínez, T.Ramírez

Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV/EHU

Resumen Teórico
Tema 1: PRELIMINARES SOBRE ÁLGEBRA LINEAL

Mayo de 2017

Tema 1

Preliminares sobre Álgebra Lineal

1 Espacios vectoriales: definiciones básicas

Definición Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo, V un conjunto con una operación interna $+$ y una aplicación $f : K \times V \to V$. Se dice que $(V, +, f)$ es un K-**espacio vectorial** si se cumple:

1. $(V, +)$ es un grupo abeliano.
2. La aplicación f satisface las siguientes propiedades:
   (a) $f(1_K, v) = v$, $\forall v \in V$
   (b) $f(\lambda_1 + \lambda_2, v) = f(\lambda_1, v) + f(\lambda_2, v)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.
   (c) $f(\lambda, v_1 + v_2) = f(\lambda, v_1) + f(\lambda, v_2)$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v_1, v_2 \in V$.
   (d) $f(\lambda_1 \lambda_2, v) = f(\lambda_1, f(\lambda_2, v))$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.

Notas:

1. A la aplicación $f : K \times V \to V$ se le denomina **multiplicación por un escalar** y se suele emplear la siguiente notación:

$$f((\lambda, v)) = \lambda v.$$

   Con esta notación las propiedades (a)–(d) de la definición de espacio vectorial pueden escribirse de la siguiente manera:

   (a) $1_K v = v$, $\forall v \in V$
   (b) $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.
   (c) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

(d) $(\lambda_1\lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.

2. Si tenemos $(V, +, f)$ un K-espacio vectorial y no hay lugar a dudas de la operación interna $+$ y de la multiplicación por un escalar f usada, por abuso del lenguaje diremos simplemente "V es un K-espacio vectorial", sin especificar ni la operación interna ni la multiplicación por un escalar. Más aún, si no hay dudas del cuerpo de escalares K en el que se trabaja, nos referiremos a V como **"espacio vectorial"** en lugar de **"K-espacio vectorial"**.

3. Cuando V es un K-espacio vectorial, a los elementos de V se les llama **vectores** y a los del cuerpo K **escalares**.

Ejemplos

1. Se considera un cuerpo $(K, +, \cdot)$ y el grupo abeliano $(\mathrm{Mat}_{n\times m}(K), +)$, siendo

$$\mathrm{Mat}_{n\times m}(K) = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$$

y $+$ la suma usual de matrices:

$$\forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Definimos la multiplicación por un escalar siguiente:

$$\forall \lambda \in K, \forall (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times m}, \quad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Es fácil ver que esta multiplicación por un escalar cumple (a)–(d), así que $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ es un K-espacio vectorial.

2. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y

$$K^n = \{(k_1, \ldots, k_n) | k_i \in K, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Se define en K^n la siguiente operación interna:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in K^n,$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

y la multiplicación por un escalar:

$$\forall \lambda \in K, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n,\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Es fácil ver que K^n es un K-espacio vectorial. En particular, si $K = \mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos, siendo $q = p^t$, para algún p primo, se tiene que $\mathbb{F}_q^n$ es un $\mathbb{F}_q$-espacio vectorial para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\mathcal{P}_n(K) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in K,\ i \in \{0, 1, \cdots, n\}\}$$

el conjunto de los polinomios en la variable x con coeficientes en el cuerpo K y grado menor o igual a n. Si tomamos en $\mathcal{P}_n(K)$ la suma usual de polinomios y definimos la multiplicación por un escalar $\forall \lambda \in K$, $\forall a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathcal{P}_n(K)$,

$$\lambda \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n,$$

resulta que $(\mathcal{P}_n(K), +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

4. Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo y

$$K[x] = \{\sum_{i=0}^{m} a_ix^i | m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in K,\ i \in \{0, 1, \cdots, n\}\}$$

el conjunto de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el cuerpo K. Si tomamos en $K[x]$ la suma usual de polinomios y definimos la multiplicación por un escalar $\forall \lambda \in K$, $\forall \sum_{i=0}^{m} a_ix^i \in K[x]$,

$$\lambda \cdot \sum_{i=0}^{m} a_ix^i = \sum_{i=0}^{m} \lambda a_ix^i,$$

resulta que $(K[x], +, \cdot)$ es un K-espacio vectorial.

En la siguiente proposición vemos algunas propiedades que se cumplen en los espacios vectoriales, cuando elegimos escalares o vectores especiales:

Proposición 1.1 *Sea V un K-espacio vectorial. Entonces,*

1. $\lambda 0_V = 0_V$, $\forall \lambda \in K$.
2. $0_K v = 0_V$, $\forall v \in V$.
3. $(-1_K)v = -v$, $\forall v \in V$.
4. *Si $\lambda \in K$ y $v \in V$ verifican que $\lambda v = 0_V$, entonces $\lambda = 0_K$ ó $v = 0_V$.*

Nota: En la Proposición anterior hemos denotado por 0_V el elemento neutro para la operación interna $+$ de V, 0_K el elemento neutro para la operación interna $+$ de K y -1_K es el elemento opuesto del elemento neutro 1_K de la segunda operación interna $\cdot$ del cuerpo K y $-v$ es el elemento opuesto de v para la suma de vectores.

2 Subespacios vectoriales

Definición Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Se dice que S es un K-**subespacio vectorial** de V, y se denota por $S \leq V$, si S con las operaciones suma y multiplicación por un escalar restringidas a S (esto es, la suma de vectores de S es otro vector de S y la multiplicación de un escalar por un vector de S es un vector de S) es un K-espacio vectorial.

En la siguiente proposición, damos una caracterización equivalente del concepto de subespacio vectorial, que facilitará el comprobar si un subconjunto de un K-espacio vectorial es subespacio vectorial.

Proposición 2.1 (Caracterizaciones equivalentes) *Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Entonces, son equivalentes*

1. *S es un K- subespacio vectorial de V.*
2. *$\forall s_1, s_2 \in S, \quad s_1 + s_2 \in S$ y $\forall \lambda \in K, \forall s \in S, \quad \lambda s \in S$.*
3. *$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall s_1, s_2 \in S, \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in S$.*

Ejemplos

1. Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, cualquier recta que pase por el $(0,0,0)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0, z+y = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ya que para cualesquiera $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in S$ y cualesquiera escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\alpha(x_1,y_1,z_1) + \beta(x_2,y_2,z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

   que satisface

$$\alpha x_1 + \beta x_2 - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x_1 - 2y_1) + \beta(x_2 - 2y_2) = 0$$

   y

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(z_1 + y_1) + \beta(z_2 + y_2) = 0$$

   por ser $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) \in S$.

2. Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios en la variable x con coeficientes reales y grado menor o igual a 4, $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, es fácil ver que el subconjunto $S = \{a + bx + ax^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Si tenemos un K-espacio vectorial V y tomamos vectores $v_1, v_2, \ldots v_s \in V$, con $s \geq 1$, podemos construir un subespacio vectorial de V que contenga a estos vectores de la manera siguiente:

$$< v_1, v_2, \ldots, v_s >= \{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i | \lambda_i \in K \, \forall i \in \{1, \ldots, s\}\}.$$

En efecto, claramente el subconjunto $< v_1, v_2, \ldots, v_s >$ es no vacío, ya que al menos se encuentran los vectores v_i, para $i = 1, \ldots, s$. Además, si elegimos $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i \in < v_1, v_2, \ldots, v_s >$ y tomamos dos escalares $\alpha, \beta \in K$, tenemos

$$\alpha \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i = \sum_{i=1}^{s} (\alpha\lambda_i + \beta\delta_i) v_i$$

y como para $i = 1, \ldots, s$ se cumple que $\alpha\lambda_i + \beta\delta_i \in K$, se sigue que $\alpha \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i$ es un elemento de $< v_1, v_2, \ldots, v_s >$. Por tanto, el subconjunto $< v_1, v_2, \ldots, v_s >$ es un K-subespacio vectorial de V, al que llamaremos **subespacio generado por los vectores** $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ y tiene la propiedad de ser el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$.

En la siguiente proposición mostramos que la suma e intersección de subespacios vectoriales es otro subespacio vectorial.

Proposición 2.2 *Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2 dos K-subespacios de V. Entonces, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \mid s_i \in S_i, i = 1, 2\}$ con la suma y la multiplicación por un escalar restringidas a ellos son K-subespacios vectoriales de V.*

A $S_1 \cap S_2$ se le llama **subespacio intersección** de S_1 y S_2 y a $S_1 + S_2$ **subespacio suma** de S_1 y S_2.

Si S_1, S_2 son dos subespacios de V tales que $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$ y $S_1 + S_2 = V$, diremos que V se expresa como **suma directa** de los subespacios S_1 y S_2. Cuando V sea suma directa de S_1 y S_2 escribiremos $V = S_1 \oplus S_2$ y diremos que S_1 (respectivamente, S_2) es un subespacio suplementario de S_2 (respectivamente, S_1).

Esto se puede extender cuando trabajamos con un número finito de subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial, en lugar de con dos, como sigue:

Definición Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2, ..., S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio intersección** de S_1, S_2, ..., S_r a

$$\bigcap_{i=1}^{r} S_i = \{v \in V \mid v \in S_i, \, \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2, ..., S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio suma** de S_1, S_2, ..., S_r a

$$\sum_{i=1}^{r} S_i = \{v_1 + \cdots + v_r \in V | v_i \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2, ..., S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se dice que V es **suma directa** de S_1, S_2, ..., S_r, y se escribe $V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_r$, si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $\sum_{i=1}^{r} S_i = V$.
2. $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$, $S_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} S_j = \{0_V\}$.

3 Base y dimensión de un espacio vectorial

En este apartado, para aquellos espacios vectoriales que lo admitan, vamos a ver cómo localizar subconjuntos minimales del espacio a partir de los cuales sea posible obtener todos los elementos del espacio vectorial usando la suma y la multiplicación por escalares. Necesitamos unas definiciones previas:

Definición Sea V un K-espacio vectorial, $v_1, \ldots, v_r \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Se llama K-**combinación lineal** de los vectores $v_1, \ldots, v_r$ con escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ al vector $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.

Definición Un subconjunto $T \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es un K-**sistema generador** de V si cualquier vector de V se expresa como combinación lineal de vectores de T.

Definición Se dice que un espacio vectorial es **finitamente generado** si admite un sistema generador finito.

Definición Un subconjunto $T \subseteq V$ se dice que es K-**libre** ó que sus vectores son K-**linealmente independientes** si se cumple la siguiente condición: $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K, \forall v_1, \ldots, v_r \in T$,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0_V \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_K.$$

Definición Si un subconjunto T no es libre se dice que es K-**ligado** o que sus vectores son K-**linealmente dependientes**.

Definición Un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es una **base**, si $\mathcal{B}$ es K-sistema generador de V y $\mathcal{B}$ es K-libre.

Ejemplos

1. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ el conjunto
$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que
   (a) Para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se escribe:
   $$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
   con $x,y,z \in \mathbb{R}$, luego $\mathcal{B}$ es un sistema generador para $\mathbb{R}^3$.
   (b) El conjunto $\mathcal{B}$ es libre ya que
   $$(0,0,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (\alpha,\beta,\gamma)$$
   implica
   $$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. Usando el mismo argumento que en el ejemplo anterior, es sencillo ver que en el K-espacio vectorial K^n, donde $n \in \mathbb{N}$, el conjunto
$$\mathcal{B} = \{(1_K, 0_K, \ldots, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, \ldots, 0_K), \ldots, (0_K, \ldots, 0_K, 1_K)\}$$
es una base de K^n.

3. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es fácil comprobar que el conjunto
$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$$
es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

La siguiente proposición nos da una propiedad de los conjuntos generadores que además sean ligados:

Proposición 3.1 *T un K-sistema generador K-ligado del K-espacio vectorial V, entonces existe un vector $v \in T$ que es K-combinación lineal de vectores de $T - \{v\}$ y $T - \{v\}$ es un sistema generador de V.*

Esta propiedad se utiliza para probar:

Teorema 3.2 (Existencia de base) *Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, existe $\mathcal{B}$ base de V.*

La clave de la demostración del resultado anterior está en elegir un sistema generador finito y analizar si es libre o no. Si es libre, se tiene ya la base buscada. Si no es libre, se construye otro sistema generador a partir de él quitando un vector que sea combinación lineal de los restantes del nuevo sistema generador. Obviamente, este nuevo sistema generador tiene un vector menos que el inicial y podemos reiterar el proceso indicado (eliminar uno que sea combinación lineal de los restantes que queden) hasta llegar a un conjunto que sea libre. El hecho de que V sea no nulo y finitamente generado garantiza que el proceso acabará en un número finito de pasos.

Una vez que sabemos que un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado admite una base, nos preocupamos por saber si dos bases de un mismo K-espacio vectorial no nulo finitamente generado tienen el mismo cardinal. La respuesta va a ser positiva. Pero para poder probarlo hay que usar el siguiente resultado que se usa mucho en Álgebra Lineal:

Teorema 3.3 (Teorema del Reemplazamiento) *Sea V un K-espacio vectorial no nulo, $T = \{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ un K-sistema generador y $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq V$ un subconjunto K-libre. Entonces,*

1. *$r \leq m$.*
2. *Existe $S \subseteq T$ tal que $|S| = m - r$ y $U \cup S$ es un K-sistema generador de V.*

La clave para probar el Teorema del Reemplazamiento es usar que si V un K-espacio vectorial y si consideramos $\{u_1\} \cup T = \{u_1, t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ (que es también sistema generador), entonces $\{u_1\} \cup T$ es un subconjunto K-ligado tal que $u_1 \neq 0_V$ y, por tanto, existe $t_j \in T$ tal que t_j es K-combinación lineal de $u_1, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}$. Si llamamos $T' = \{u_1, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots t_m\}$, resulta que T' es un sistema generador y podemos aplicar el mismo razonamiento que acabamos de hacer, pero ahora con u_2 y T' y así hasta introducir los r vectores del conjunto libre.

Tal y como hemos comentado, el Teorema del Reemplazamiento se utiliza en la demostración del siguiente resultado relativo al cardinal de las bases de un espacio vectorial finitamente generado:

Teorema 3.4 *Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, todas las bases de V poseen en mismo cardinal.*

Al tener todas las bases de un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado el mismo cardinal tiene sentido dar la siguiente definición:

Definición Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Se llama **dimensión** de V, y se denota por $\dim_K(V)$, al cardinal de cualquier base de V. Si $V = \{0_V\}$, se dice que su dimensión es 0 y su base es el conjunto vacío.

Ejemplos

1. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ hemos visto que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$, así que $\mathbb{R}^3$ es de dimensión 3.

2. En el K-espacio vectorial K^n, donde $n \in \mathbb{N}$, sabemos que el conjunto $\mathcal{B} = \{(1_K, 0_K, \ldots, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, \ldots, 0_K), \ldots, (0_K, \ldots, 0_K, 1_K)\}$ es una base de K^n. Por tanto, K^n tiene dimensión n.

3. El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4 ya que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

El conocer la dimensión de un espacio vectorial nos puede ser útil para saber si subconjuntos del espacio vectorial son o no bases. Lo resumimos en las siguientes proposiciones:

Proposición 3.5 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un K-sistema generador, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Proposición 3.6 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es K-libre, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Así, si tenemos un subconjunto de V de cardinal la dimensión de V, entonces basta con que se cumpla una de las dos condiciones de la definición de base para garantizar que también se cumple la otra.

Además, se puede demostrar que los subespacios vectoriales de espacios vectoriales de dimensión finita son también de dimensión finita y ésta es siempre menor o igual que la del espacio vectorial que les contiene. En concreto,

Teorema 3.7 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n y W un K-subespacio de V. Entonces,*

1. *W es finitamente generado y* $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$.

2. *Si* $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ *es una base de* W*, entonces existen* $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ *tales que* $\mathcal{B}_W \cup \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V*.*

El paso clave para demostrar el apartado 2 del Teorema anterior es el siguiente:

Se toma a $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\} = U_1$ como conjunto libre de V y una base $\mathcal{B}_V = \{t_1, \ldots, t_n\} = T_1$ de V como sistema generador de V y se aplica el Teorema del Reemplazamiento. Los vectores de $S \subseteq T_1$ tales que $\mathcal{B}_W \cup S$ es sistema generador de V son los que aparecen en el enunciado.

A este proceso se le llama **completar la base de** W hasta obtener una base de V. Además, si consideramos el subespacio vectorial generado por $v_{r+1}, \ldots, v_n$, esto es, $U =< v_{r+1}, \ldots, v_n >$, resulta que $V = W \oplus U$, es decir, que U es un subespacio suplementario de W.

Por otro lado, como consecuencia de las dos últimas proposiciones y de este último resultado tenemos:

Teorema 3.8 *Sea* V *un* K*-espacio vectorial de dimensión finita* n *y* W *un* K*-subespacio de* V*. Entonces,* $W = V$ *si y sólo si* $\dim_K(W) = \dim_K(V)$.

Nos preguntamos qué sucede con las dimensiones de $U + W$ y de $U \cap W$, si tenemos un K-espacio vectorial de dimensión finita y U y W dos K-subespacios de V. Se puede demostrar que existe una relación entre ellas, tal y como se enuncia en la siguiente proposición:

Proposición 3.9 *Sea* V *un* K*-espacio vectorial de dimensión finita y sean* U*,* W *dos* K*-subespacios de* V*. Entonces,*

$$\dim_K(U + W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U \cap W).$$

Los pasos necesarios para probar el resultado anterior son:

- Se toma una base de $U \cap W$, que denotamos por $\mathcal{B}_{U\cap W}$.
- Se completa $\mathcal{B}_{U\cap W}$ hasta obtener una base de U, $\mathcal{B}_U = \mathcal{B}_{U\cap W} \cup T_1$ y otra de W, $\mathcal{B}_W = \mathcal{B}_{U\cap W} \cup T_2$.
- Se comprueba que $\mathcal{B}_{U\cap W} \cup T_1 \cup T_2$ es base de $U + W$.

4 Coordenadas de un vector

Cuando estamos trabajando en un K-espacio vectorial V de dimensión finita y tenemos una base de él, sabemos que cada vector de V se expresa como combinación lineal de los elementos de la base. Pero ¿es esta combinación de vectores de la base la única que nos puede dar ese vector? El siguiente resultado responde a esta cuestión:

Teorema 4.1 *Sean V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, v un vector de V y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.*

Si entendemos que en una base de un K-espacio vectorial de dimensión finita n el orden en que aparecen los vectores de la base es una característica de ella y que si cambiamos de orden dos vectores de esa base hacen que obtengamos una base diferente (aunque como conjuntos ambos sean el mismo), el resultado anterior justifica que a los escalares que usamos en la combinación lineal que nos da el vector reciban un nombre:

Definición Se llaman **coordenadas del vector** v en la base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a los únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Observamos que el orden que indicamos es fundamental, porque el escalar que ocupa la posición i acompaña al i-ésimo vector de la base. Por convenio, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y v es un vector con coordenadas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respecto de $\mathcal{B}$, escribiremos estas coordenadas mediante una matriz fila $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$. Esto nos permitirá expresar el vector v de forma matricial como sigue:

$$v = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplos

1. Se considera $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la variable x, esto es,

   $$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{0, \ldots, 3\}\}.$$

   Es fácil ver que $\mathcal{B}_1 = \{1, 1+x, 1+x^2, x^3\}$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Si tomamos el vector $v = 5 + x + x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, se tiene que

   $$v = 5 + x + x^3 = 4 \cdot 1 + 1(1+x) + 0(1+x^2) + 1x^3,$$

   luego las coordenadas de $5 + x + x^3$ en la base $\mathcal{B}_1$ vienen dadas por $(4\ 1\ 0\ 1)$. En cambio, si tomamos la base $\mathcal{B}_2 = \{1+x, 1, 1+x^2, x^3\}$, que se ha obtenido cambiando el orden de dos vectores de $\mathcal{B}_1$, entonces las coordenadas del mismo vector $v = 5 + x + x^3$ son $(1\ 4\ 0\ 1)$.

2. Si tomamos el $\mathbb{F}_3$-espacio vectorial $\mathbb{F}_3^4$, el conjunto $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{F}_3^4$. El vector $(1,2,0,1) \in \mathbb{F}_3^4$ se expresa como combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$ mediante:

$$(1,2,0,1) = 1(1,1,1,1) + 1(0,1,1,1) + 1(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1),$$

por tanto, las coordenadas de $(1,2,0,1)$ en la base $\mathcal{B}$ son $(1\ 1\ 1\ 1)$. Obsérvese que en $\mathbb{F}_3$, se cumple que 1+1+1=0

En resumen,

1. Si V es un K-espacio vectorial de dimensión n, las coordenadas de cualquier vector siempre son n escalares ordenados de K, siendo su orden el que marca el orden de los vectores de la base.
2. Las coordenadas de un vector dependen de la base que se elija. El mismo vector puede tener coordenadas diferentes en bases distintas. El único vector que tiene siempre las mismas coordenads en todas las bases es el vector 0_V.
3. Si nos cambian la base, las mismas coordenadas pueden representar vectores diferentes.