Introducción a la Teoría de Códigos

M.A.García, L. Martínez, T.Ramírez

Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV/EHU

Resumen Teórico
Apartado 4 del Tema 1:
Coordenadas de un vector

Mayo de 2017

4 Coordenadas de un vector

Cuando estamos trabajando en un K-espacio vectorial V de dimensión finita y tenemos una base de él, sabemos que cada vector de V se expresa como combinación lineal de los elementos de la base. Pero ¿es esta combinación de vectores de la base la única que nos puede dar ese vector? El siguiente resultado responde a esta cuestión:

Teorema 4.1 *Sean V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, v un vector de V y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, existen unos únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.*

Si entendemos que en una base de un K-espacio vectorial de dimensión finita n el orden en que aparecen los vectores de la base es una característica de ella y que si cambiamos de orden dos vectores de esa base hacen que obtengamos una base diferente (aunque como conjuntos ambos sean el mismo), el resultado anterior justifica que a los escalares que usamos en la combinación lineal que nos da el vector reciban un nombre:

Definición Se llaman **coordenadas del vector** v en la base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a los únicos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ tales que $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$.

Observamos que el orden que indicamos es fundamental, porque el escalar que ocupa la posición i acompaña al i-ésimo vector de la base. Por convenio, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y v es un vector con coordenadas $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respecto de $\mathcal{B}$, escribiremos estas coordenadas mediante una matriz fila $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$. Esto nos permitirá expresar el vector v de forma matricial como sigue:

$$v = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplos

1. Se considera $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la variable x, esto es,

$$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 | a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{0, \ldots, 3\}\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{B}_1 = \{1, 1+x, 1+x^2, x^3\}$ es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Si tomamos el vector $v = 5 + x + x^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, se tiene que

$$v = 5 + x + x^3 = 4 \cdot 1 + 1(1+x) + 0(1+x^2) + 1x^3,$$

luego las coordenadas de $5 + x + x^3$ en la base $\mathcal{B}_1$ vienen dadas por $(4\ 1\ 0\ 1)$. En cambio, si tomamos la base $\mathcal{B}_2 = \{1+x, 1, 1+x^2, x^3\}$, que se ha obtenido cambiando el orden de dos vectores de $\mathcal{B}_1$, entonces las coordenadas del mismo vector $v = 5 + x + x^3$ son $(1\ 4\ 0\ 1)$.

2. Si tomamos el $\mathbb{F}_3$-espacio vectorial $\mathbb{F}_3^4$, el conjunto $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{F}_3^4$. El vector $(1,2,0,1) \in \mathbb{F}_3^4$ se expresa como combinación lineal de vectores de $\mathcal{B}$ mediante:

$$(1,2,0,1) = 1(1,1,1,1) + 1(0,1,1,1) + 1(0,0,1,1) + 1(0,0,0,1),$$

por tanto, las coordenadas de $(1,2,0,1)$ en la base $\mathcal{B}$ son $(1\ 1\ 1\ 1)$. Obsérvese que en $\mathbb{F}_3$, se cumple que 1+1+1=0

En resumen,

1. Si V es un K-espacio vectorial de dimensión n, las coordenadas de cualquier vector siempre son n escalares ordenados de K, siendo su orden el que marca el orden de los vectores de la base.

2. Las coordenadas de un vector dependen de la base que se elija. El mismo vector puede tener coordenadas diferentes en bases distintas. El único vector que tiene siempre las mismas coordenads en todas las bases es el vector 0_V.

3. Si nos cambian la base, las mismas coordenadas pueden representar vectores diferentes.