Introducción a la Teoría de Códigos

M.A.García, L. Martínez, T.Ramírez

Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV/EHU

Resumen Teórico
Apartado 3 del Tema 1:

Base y dimensión de un espacio vectorial

Mayo de 2017

3 Base y dimensión de un espacio vectorial

En este apartado, para aquellos espacios vectoriales que lo admitan, vamos a ver cómo localizar subconjuntos minimales del espacio a partir de los cuales sea posible obtener todos los elementos del espacio vectorial usando la suma y la multiplicación por escalares. Necesitamos unas definiciones previas:

Definición Sea V un K-espacio vectorial, $v_1, \dots, v_r \in V$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$. Se llama K-**combinación lineal** de los vectores $v_1, \dots, v_r$ con escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ al vector $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$.

Definición Un subconjunto $T \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es un K-**sistema generador** de V si cualquier vector de V se expresa como combinación lineal de vectores de T.

Definición Se dice que un espacio vectorial es **finitamente generado** si admite un sistema generador finito.

Definición Un subconjunto $T \subseteq V$ se dice que es K-**libre** ó que sus vectores son K-**linealmente independientes** si se cumple la siguiente condición: $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K, \forall v_1, \dots, v_r \in T$,

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0_V \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0_K.$$

Definición Si un subconjunto T no es libre se dice que es K-**ligado** o que sus vectores son K-**linealmente dependientes**.

Definición Un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq V$ del K-espacio vectorial V se dice que es una **base**, si $\mathcal{B}$ es K-sistema generador de V y $\mathcal{B}$ es K-libre.

Ejemplos

1. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ el conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

   es una base de $\mathbb{R}^3$ ya que

   (a) Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se escribe:

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

   con $x, y, z \in \mathbb{R}$, luego $\mathcal{B}$ es un sistema generador para $\mathbb{R}^3$.

(b) El conjunto $\mathcal{B}$ es libre ya que

$$(0,0,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (\alpha,\beta,\gamma)$$

implica
$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. Usando el mismo argumento que en el ejemplo anterior, es sencillo ver que en el K-espacio vectorial K^n, donde $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\mathcal{B} = \{(1_K, 0_K, \ldots, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, \ldots, 0_K), \ldots, (0_K, \ldots, 0_K, 1_K)\}$$

es una base de K^n.

3. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es fácil comprobar que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

La siguiente proposición nos da una propiedad de los conjuntos generadores que además sean ligados:

Proposición 3.1 *T un K-sistema generador K-ligado del K-espacio vectorial V, entonces existe un vector $v \in T$ que es K-combinación lineal de vectores de $T - \{v\}$ y $T - \{v\}$ es un sistema generador de V.*

Esta propiedad se utiliza para probar:

Teorema 3.2 (Existencia de base) *Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, existe $\mathcal{B}$ base de V.*

La clave de la demostración del resultado anterior está en elegir un sistema generador finito y analizar si es libre o no. Si es libre, se tiene ya la base buscada. Si no es libre, se construye otro sistema generador a partir de él quitando un vector que sea combinación lineal de los restantes del nuevo sistema generador. Obviamente, este nuevo sistema generador tiene un vector menos que el inicial y podemos reiterar el proceso indicado (eliminar uno que sea combinación lineal de los restantes que queden) hasta llegar a un conjunto que sea libre. El hecho de que V sea no nulo y finitamente generado garantiza que el proceso acabará en un número finito de pasos.

Una vez que sabemos que un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado admite una base, nos preocupamos por saber si dos bases de un mismo K-espacio vectorial no nulo finitamente generado tienen el mismo cardinal. La respuesta va a ser positiva. Pero para poder probarlo hay que usar el siguiente resultado que se usa mucho en Álgebra Lineal:

Teorema 3.3 (Teorema del Reemplazamiento) *Sea V un K-espacio vectorial no nulo, $T = \{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ un K-sistema generador y $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq V$ un subconjunto K-libre. Entonces,*

1. *$r \leq m$.*
2. *Existe $S \subseteq T$ tal que $|S| = m - r$ y $U \cup S$ es un K-sistema generador de V.*

La clave para probar el Teorema del Reemplazamiento es usar que si V un K-espacio vectorial y si consideramos $\{u_1\} \cup T = \{u_1, t_1, \ldots, t_m\} \subseteq V$ (que es también sistema generador), entonces $\{u_1\} \cup T$ es un subconjunto K-ligado tal que $u_1 \neq 0_V$ y, por tanto, existe $t_j \in T$ tal que t_j es K-combinación lineal de $u_1, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}$. Si llamamos $T' = \{u_1, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots t_m\}$, resulta que T' es un sistema generador y podemos aplicar el mismo razonamiento que acabamos de hacer, pero ahora con u_2 y T' y así hasta introducir los r vectores del conjunto libre.

Tal y como hemos comentado, el Teorema del Reemplazamiento se utiliza en la demostración del siguiente resultado relativo al cardinal de las bases de un espacio vectorial finitamente generado:

Teorema 3.4 *Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Entonces, todas las bases de V poseen en mismo cardinal.*

Al tener todas las bases de un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado el mismo cardinal tiene sentido dar la siguiente definición:

Definición Sea V un K-espacio vectorial no nulo finitamente generado. Se llama **dimensión** de V, y se denota por $\dim_K(V)$, al cardinal de cualquier base de V. Si $V = \{0_V\}$, se dice que su dimensión es 0 y su base es el conjunto vacío.

Ejemplos

1. En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ hemos visto que el conjunto
$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$
es una base de $\mathbb{R}^3$, así que $\mathbb{R}^3$ es de dimensión 3.

2. En el K-espacio vectorial K^n, donde $n \in \mathbb{N}$, sabemos que el conjunto $\mathcal{B} = \{(1_K, 0_K, \ldots, 0_K), (0_K, 1_K, 0_K, \ldots, 0_K), \ldots, (0_K, \ldots, 0_K, 1_K)\}$ es una base de K^n. Por tanto, K^n tiene dimensión n.

3. El $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tiene dimensión 4 ya que el conjunto
$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$$
es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

El conocer la dimensión de un espacio vectorial nos puede ser útil para saber si subconjuntos del espacio vectorial son o no bases. Lo resumimos en las siguientes proposiciones:

Proposición 3.5 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un K-sistema generador, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Proposición 3.6 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n. Si $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es K-libre, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Así, si tenemos un subconjunto de V de cardinal la dimensión de V, entonces basta con que se cumpla una de las dos condiciones de la definición de base para garantizar que también se cumple la otra.

Además, se puede demostrar que los subespacios vectoriales de espacios vectoriales de dimensión finita son también de dimensión finita y ésta es siempre menor o igual que la del espacio vectorial que les contiene. En concreto,

Teorema 3.7 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n y W un K-subespacio de V. Entonces,*

1. *W es finitamente generado y $\dim_K(W) \leq \dim_K(V)$.*
2. *Si $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\}$ es una base de W, entonces existen $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $\mathcal{B}_W \cup \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

El paso clave para demostrar el apartado 2 del Teorema anterior es el siguiente:

Se toma a $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_r\} = U_1$ como conjunto libre de V y una base $\mathcal{B}_V = \{t_1, \ldots, t_n\} = T_1$ de V como sistema generador de V y se aplica el Teorema del Reemplazamiento. Los vectores de $S \subseteq T_1$ tales que $\mathcal{B}_W \cup S$ es sistema generador de V son los que aparecen en el enunciado.

A este proceso se le llama **completar la base de** W hasta obtener una base de V. Además, si consideramos el subespacio vectorial generado por $v_{r+1}, \ldots, v_n$, esto es, $U =< v_{r+1}, \ldots, v_n >$, resulta que $V = W \oplus U$, es decir, que U es un subespacio suplementario de W.

Por otro lado, como consecuencia de las dos últimas proposiciones y de este último resultado tenemos:

Teorema 3.8 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n y W un K-subespacio de V. Entonces, $W = V$ si y sólo si $\dim_K(W) = \dim_K(V)$.*

Nos preguntamos qué sucede con las dimensiones de $U+W$ y de $U\cap W$, si tenemos un K-espacio vectorial de dimensión finita y U y W dos K-subespacios de V. Se puede demostrar que existe una relación entre ellas, tal y como se enuncia en la siguiente proposición:

Proposición 3.9 *Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sean U, W dos K-subespacios de V. Entonces,*

$$\dim_K(U+W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U\cap W).$$

Los pasos necesarios para probar el resultado anterior son:

- Se toma una base de $U\cap W$, que denotamos por $\mathcal{B}_{U\cap W}$.
- Se completa $\mathcal{B}_{U\cap W}$ hasta obtener una base de U, $\mathcal{B}_U = \mathcal{B}_{U\cap W}\cup T_1$ y otra de W, $\mathcal{B}_W = \mathcal{B}_{U\cap W}\cup T_2$.
- Se comprueba que $\mathcal{B}_{U\cap W}\cup T_1\cup T_2$ es base de $U+W$.

