Introducción a la Teoría de Códigos

M.A.García, L. Martínez, T.Ramírez

Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV/EHU

Resumen Teórico
Apartado 2 del Tema 1:
Subespacio vectorial

Mayo de 2017

2 Subespacios vectoriales

Definición Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Se dice que S es un K-**subespacio vectorial** de V, y se denota por $S \leq V$, si S con las operaciones suma y multiplicación por un escalar restringidas a S (esto es, la suma de vectores de S es otro vector de S y la multiplicación de un escalar por un vector de S es un vector de S) es un K-espacio vectorial.

En la siguiente proposición, damos una caracterización equivalente del concepto de subespacio vectorial, que facilitará el comprobar si un subconjunto de un K-espacio vectorial es subespacio vectorial.

Proposición 2.1 (Caracterizaciones equivalentes) *Sea V un K-espacio vectorial y S un subconjunto de V no vacío. Entonces, son equivalentes*

1. S es un K- subespacio vectorial de V.

2. $\forall s_1, s_2 \in S, \quad s_1 + s_2 \in S$ y $\forall \lambda \in K, \forall s \in S, \quad \lambda s \in S$.

3. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall s_1, s_2 \in S, \quad \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 \in S$.

Ejemplos

1. Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, cualquier recta que pase por el $(0,0,0)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0, z+y = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ya que para cualesquiera $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S$ y cualesquiera escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$$

que satisface

$$\alpha x_1 + \beta x_2 - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(x_1 - 2y_1) + \beta(x_2 - 2y_2) = 0$$

y

$$\alpha z_1 + \beta z_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha(z_1 + y_1) + \beta(z_2 + y_2) = 0$$

por ser $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in S$.

2. Si tomamos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de los polinomios en la variable x con coeficientes reales y grado menor o igual a 4, $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, es fácil ver que el subconjunto $S = \{a + bx + ax^3 | a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

Si tenemos un K-espacio vectorial V y tomamos vectores $v_1, v_2, \ldots v_s \in V$, con $s \geq 1$, podemos construir un subespacio vectorial de V que contenga a estos vectores de la manera siguiente:

$$< v_1, v_2, \ldots, v_s >= \{\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i | \lambda_i \in K \, \forall i \in \{1, \ldots, s\}\}.$$

En efecto, claramente el subconjunto $< v_1, v_2, \ldots, v_s >$ es no vacío, ya que al menos se encuentran los vectores v_i, para $i = 1, \ldots, s$. Además, si elegimos $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i \in < v_1, v_2, \ldots, v_s >$ y tomamos dos escalares $\alpha, \beta \in K$, tenemos

$$\alpha \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i = \sum_{i=1}^{s} (\alpha \lambda_i + \beta \delta_i) v_i$$

y como para $i = 1, \ldots, s$ se cumple que $\alpha \lambda_i + \beta \delta_i \in K$, se sigue que $\alpha \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i + \beta \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i$ es un elemento de $< v_1, v_2, \ldots, v_s >$. Por tanto, el subconjunto $< v_1, v_2, \ldots, v_s >$ es un K-subespacio vectorial de V, al que llamaremos **subespacio generado por los vectores** $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ y tiene la propiedad de ser el menor subespacio de V que contiene a los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s$.

En la siguiente proposición mostramos que la suma e intersección de subespacios vectoriales es otro subespacio vectorial.

Proposición 2.2 *Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2 dos K-subespacios de V. Entonces, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \mid s_i \in S_i, i = 1, 2\}$ con la suma y la multiplicación por un escalar restringidas a ellos son K-subespacios vectoriales de V.*

A $S_1 \cap S_2$ se le llama **subespacio intersección** de S_1 y S_2 y a $S_1 + S_2$ **subespacio suma** de S_1 y S_2.

Si S_1, S_2 son dos subespacios de V tales que $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$ y $S_1 + S_2 = V$, diremos que V se expresa como **suma directa** de los subespacios S_1 y S_2. Cuando V sea suma directa de S_1 y S_2 escribiremos $V = S_1 \oplus S_2$ y diremos que S_1 (respectivamente, S_2) es un subespacio suplementario de S_2 (respectivamente, S_1).

Esto se puede extender cuando trabajamos con un número finito de subespacios vectoriales de un mismo espacio vectorial, en lugar de con dos, como sigue:

Definición Sea V un K-espacio vectorial y S_1, S_2, $\ldots$, S_r r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio intersección** de S_1, S_2, $\ldots$, S_r a

$$\bigcap_{i=1}^{r} S_i = \{v \in V \mid v \in S_i, \, \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición Sea V un K-espacio vectorial y $S_1, S_2, \ldots, S_r$ r K-subespacios vectoriales de V. Se llama **subespacio suma** de $S_1, S_2, \ldots, S_r$ a

$$\sum_{i=1}^{r} S_i = \{v_1 + \cdots + v_r \in V | v_i \in S_i \forall i \in \{1, \ldots, r\}\}.$$

Definición Sea V un K-espacio vectorial y $S_1, S_2, \ldots, S_r$ r K-subespacios vectoriales de V. Se dice que V es **suma directa** de $S_1, S_2, \ldots, S_r$, y se escribe $V = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_r$, si se cumplen las dos siguientes condiciones:

1. $\sum_{i=1}^{r} S_i = V$.
2. $\forall i \in \{1, \cdots, r\}$, $S_i \cap \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} S_j = \{0_V\}$.