Introducción a la Teoría de Códigos

M.A.García, L. Martínez, T.Ramírez

Facultad de Ciencia y Tecnología. UPV/EHU

Resumen Teórico
Apartado 1 del Tema 1: Espacios vectoriales: definiciones básicas

Mayo de 2017

1 Espacios vectoriales: definiciones básicas

Definición Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo, V un conjunto con una operación interna $+$ y una aplicación $f : K \times V \to V$. Se dice que $(V, +, f)$ es un K-**espacio vectorial** si se cumple:

1. $(V, +)$ es un grupo abeliano.
2. La aplicación f satisface las siguientes propiedades:
   (a) $f(1_K, v) = v$, $\forall v \in V$
   (b) $f(\lambda_1 + \lambda_2, v) = f(\lambda_1, v) + f(\lambda_2, v)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.
   (c) $f(\lambda, v_1 + v_2) = f(\lambda, v_1) + f(\lambda, v_2)$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v_1, v_2 \in V$.
   (d) $f(\lambda_1\lambda_2, v) = f(\lambda_1, f(\lambda_2, v))$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.

Notas:

1. A la aplicación $f : K \times V \to V$ se le denomina **multiplicación por un escalar** y se suele emplear la siguiente notación:
$$f((\lambda, v)) = \lambda v.$$
Con esta notación las propiedades (a)–(d) de la definición de espacio vectorial pueden escribirse de la siguiente manera:
   (a) $1_K v = v$, $\forall v \in V$
   (b) $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.
   (c) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v_1, v_2 \in V$.
   (d) $(\lambda_1\lambda_2)v = \lambda_1(\lambda_2 v)$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K$, $\forall v \in V$.
2. Si tenemos $(V, +, f)$ un K-espacio vectorial y no hay lugar a dudas de la operación interna $+$ y de la multiplicación por un escalar f usada, por abuso del lenguaje diremos simplemente "V es un K-espacio vectorial", sin especificar ni la operación interna ni la multiplicación por un escalar. Más aún, si no hay dudas del cuerpo de escalares K en el que se trabaja, nos referiremos a V como **"espacio vectorial"** en lugar de **"K-espacio vectorial"**.
3. Cuando V es un K-espacio vectorial, a los elementos de V se les llama **vectores** y a los del cuerpo K **escalares**.

Ejemplos

1. Se considera un cuerpo $(K,+,\cdot)$ y el grupo abeliano $(\mathrm{Mat}_{n\times m}(K),+)$, siendo
$$\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)=\{(a_{ij}) \mid a_{ij}\in K, 1\le i\le n,\ 1\le j\le m\}$$
y $+$ la suma usual de matrices:
$$\forall (a_{ij}),(b_{ij})\in \mathrm{Mat}_{n\times m},\quad (a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}).$$
Definimos la multiplicación por un escalar siguiente:
$$\forall \lambda\in K, \forall (a_{ij})\in \mathrm{Mat}_{n\times m},\quad \lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij}).$$
Es fácil ver que esta multiplicación por un escalar cumple (a)–(d), así que $\mathrm{Mat}_{n\times m}(K)$ es un K-espacio vectorial.

2. Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y
$$K^n=\{(k_1,\dots,k_n) | k_i\in K, \forall i\in\{1,2,\dots,n\}\}.$$
Se define en K^n la siguiente operación interna:
$$\forall (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\in K^n,$$
$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
y la multiplicación por un escalar:
$$\forall \lambda\in K, \forall (x_1,\dots,x_n)\in K^n,\ \lambda(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n).$$
Es fácil ver que K^n es un K-espacio vectorial. En particular, si $K=\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos, siendo $q=p^t$, para algún p primo, se tiene que $\mathbb{F}_q^n$ es un $\mathbb{F}_q$-espacio vectorial para todo $n\in\mathbb{N}$.

3. Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y
$$\mathcal{P}_n(K)=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in K,\ i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$$
el conjunto de los polinomios en la variable x con coeficientes en el cuerpo K y grado menor o igual a n. Si tomamos en $\mathcal{P}_n(K)$ la suma usual de polinomios y definimos la multiplicación por un escalar $\forall\lambda\in K$, $\forall a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in \mathcal{P}_n(K)$,
$$\lambda\cdot(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)=\lambda a_0+\lambda a_1x+\cdots+\lambda a_nx^n,$$
resulta que $(\mathcal{P}_n(K),+,\cdot)$ es un K-espacio vectorial.

4. Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y
$$K[x]=\{\sum_{i=0}^m a_ix^i | m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, a_i\in K,\ i\in\{0,1,\cdots,n\}\}$$
el conjunto de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el cuerpo K. Si tomamos en $K[x]$ la suma usual de polinomios y definimos la multiplicación por un escalar $\forall\lambda\in K$, $\forall\sum_{i=0}^m a_ix^i\in K[x]$,
$$\lambda\cdot\sum_{i=0}^m a_ix^i=\sum_{i=0}^m \lambda a_ix^i,$$
resulta que $(K[x],+,\cdot)$ es un K-espacio vectorial.

En la siguiente proposición vemos algunas propiedades que se cumplen en los espacios vectoriales, cuando elegimos escalares o vectores especiales:

Proposición 1.1 *Sea V un K-espacio vectorial. Entonces,*

1. $\lambda 0_V = 0_V$, $\forall \lambda \in K$.
2. $0_K v = 0_V$, $\forall v \in V$.
3. $(-1_K)v = -v$, $\forall v \in V$.
4. *Si $\lambda \in K$ y $v \in V$ verifican que $\lambda v = 0_V$, entonces $\lambda = 0_K$ ó $v = 0_V$.*

Nota: En la Proposición anterior hemos denotado por 0_V el elemento neutro para la operación interna $+$ de V, 0_K el elemento neutro para la operación interna $+$ de K y -1_K es el elemento opuesto del elemento neutro 1_K de la segunda operación interna $\cdot$ del cuerpo K y $-v$ es el elemento opuesto de v para la suma de vectores.