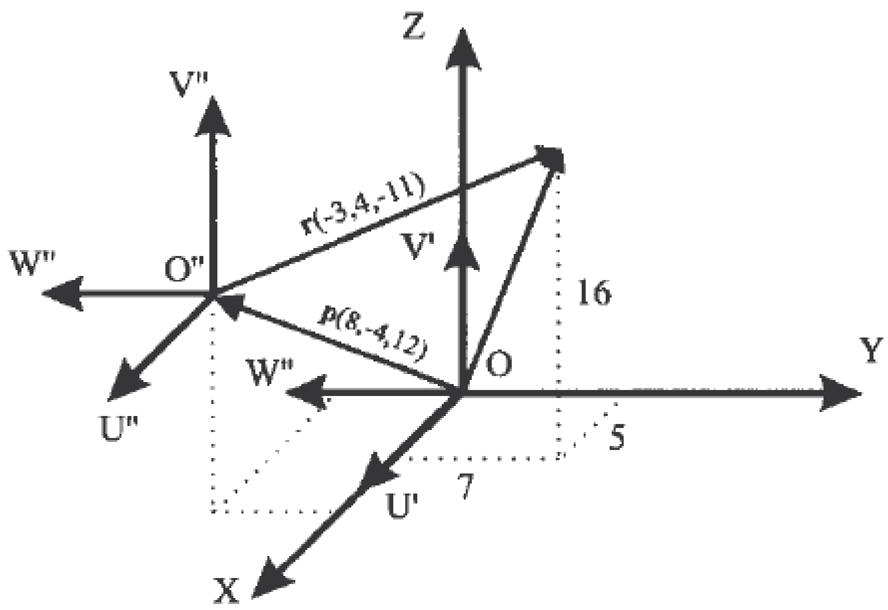
# TEMA 4. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS PARA LA LOCALIZACIÓN ESPACIAL
# **EJERCICIOS**

ROBÓTICA

**4.1 ejercicio**

Según la figura el sistema fijo {S} OXYZ ha sido girado un ángulo 90º alrededor del eje **OX** y posteriormente trasladado un vector **p**(8,-4,12). Calcular las coordenadas $\mathbf{r}_{xyz}$ del vector **r** con coordenadas $\mathbf{r}_{uvw}$(-3,4,-11).



## Cambio de coordenadas de un vector

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Rotación de 90º en el eje OX→ T(x, 90)
2. Traslación del origen → T(p)=T(8,-4,12)

$$\begin{array}{c} \\ {}_{S'}^{S}T = T(p)T(x,90) = \end{array} \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\theta & -S\theta & 0 \\ 0 & S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$${}_{S'}^{S}T = T(p)T(x,90) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Cambio de coordenadas de un vector

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^{s'}r = (-3,4,11)$$

$${}^{s}r = {}^{S}_{S'}T \cdot {}^{s'}r$$

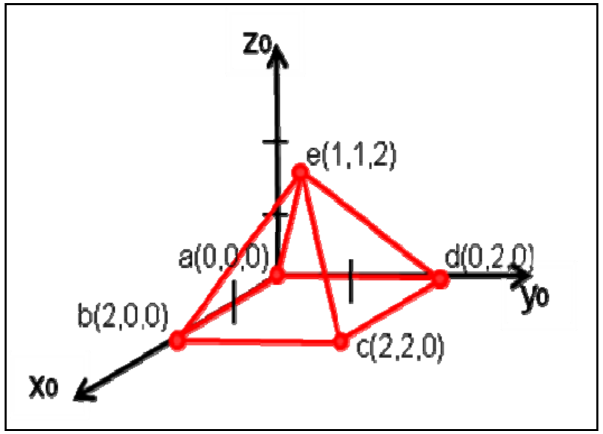
$$\begin{bmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ru \\ rv \\ rw \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^{s}r = (5,7,16)}$$

**4.2 ejercicio**

Sea el conjunto de puntos cuyas coordenadas en el sistema de referencia {OXYZ} delimitan una pirámide como la que aparece en la figura. Supóngase que se efectúan los siguientes movimientos de dicha pirámide y en este orden:

- Rotación en torno al eje Z del sistema {OXYZ} un ángulo de +90º (Se convierte en el sistema {1}).
- Rotación en torno al eje Y del sistema $\{O_1X_1Y_1Z_1\}$ un ángulo de -90º (Se convierte en el sistema {2}).
- Se desplaza un vector **p**=(0,3,0) sistema {OXYZ} (Se convierte en el sistema {3}).




Se pide

A. Obtener las matrices de transformación homogénea correspondientes de cada movimiento.
B. Dibujar las posiciones iniciales y final de la pirámide.
C. Obtener las nuevas coordenadas de todos los puntos de la pirámide después de haber realizado todos los movimientos respecto del sistema {0}={OXYZ}.


Jon Legarreta / Raquel Martinez

1) Rotación en torno al eje Z del sistema {OXYZ} un ángulo de +90º.

$$ {}^{0}_{1}T = T(z,+90) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

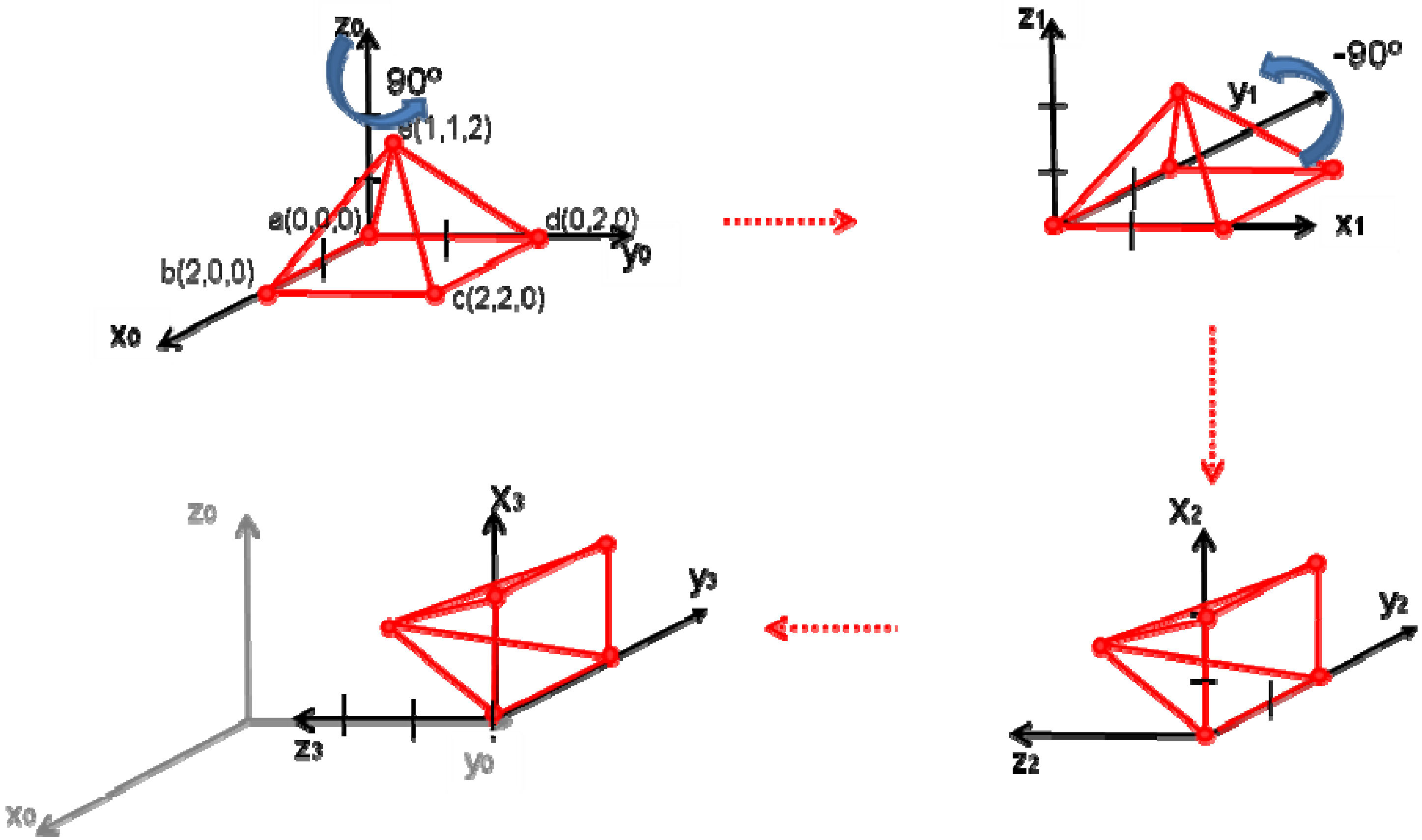
2) Rotación en torno al eje y del sistema $\{O_1X_1Y_1Z_1\}$ -90º.

$$ {}^{1}_{2}T = T(Y,-90) = \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

3) Se desplaza un vector p=(0,5,0) sistema {OXYZ}.

$$ {}^{2}_{3}T = T(0,3,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

B) Dibujar las posiciones iniciales y final de la pirámide.



C) Obtener las nuevas coordenadas de todos los puntos de la pirámide después de haber realizado todos los movimientos respecto del sistema {S0}={OXYZ}.
-Conozco las coordenadas de casa punto respecto el sistema {3}.

$$ {}^{0}_{3}T = T(0,3,0)T(z,90)T(y,-90) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Coordenadas del punto “a” respecto del {0}.

$$ {}^{0}a = {}^{0}_{3}T\,{}^{3}a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Coordenadas del punto "b" respecto del {0}.

$$^{0}b = {}^{0}_{3}T\,{}^{3}b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas del punto "c" respecto del {0}.

$$^{0}c = {}^{0}_{3}T\,{}^{3}c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas del punto "d" respecto del {0}.

$$^{0}d = {}^{0}_{3}T\,{}^{3}d = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas del punto "e" respecto del {0}.

$$
{}^{0}e = {}^{0}_{3}T\,{}^{3}e = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

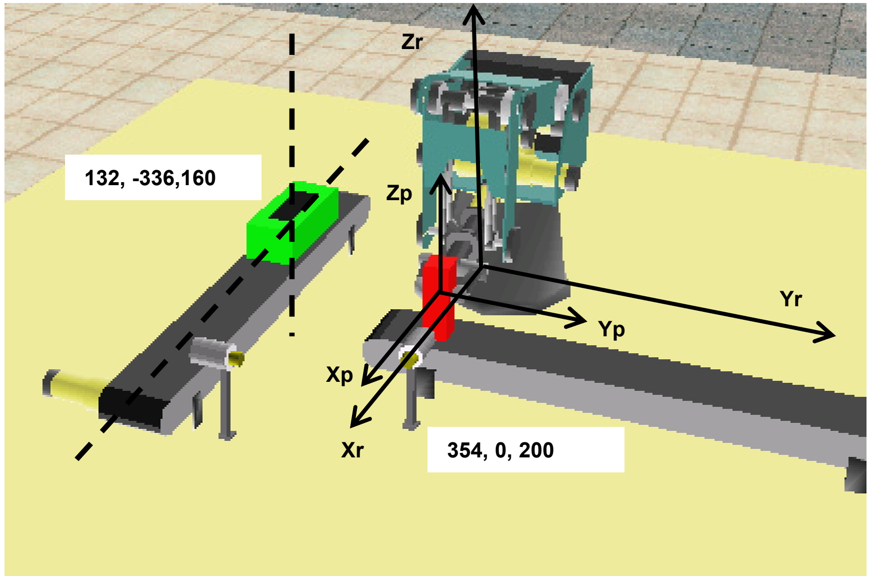
**4.3 ejercicio**

En la siguiente célula de trabajo, el robot debe de coger una pieza, detectada por un sensor colocado en una cinta y colocarla en el contenedor situado sobre la otra cinta de modo que encaje dentro de él. Se ha asignado un sistema de referencia en la base del robot {Sr} y otro en el objeto {Sp}.

Las coordenadas de la pieza respecto del robot son = (354,0,200)

Las coordenadas del contenedor con respecto del robot son = (132,-336,160)

1) Calcular la MTH que describa los movimientos necesarios para colocar la pieza en el contenedor

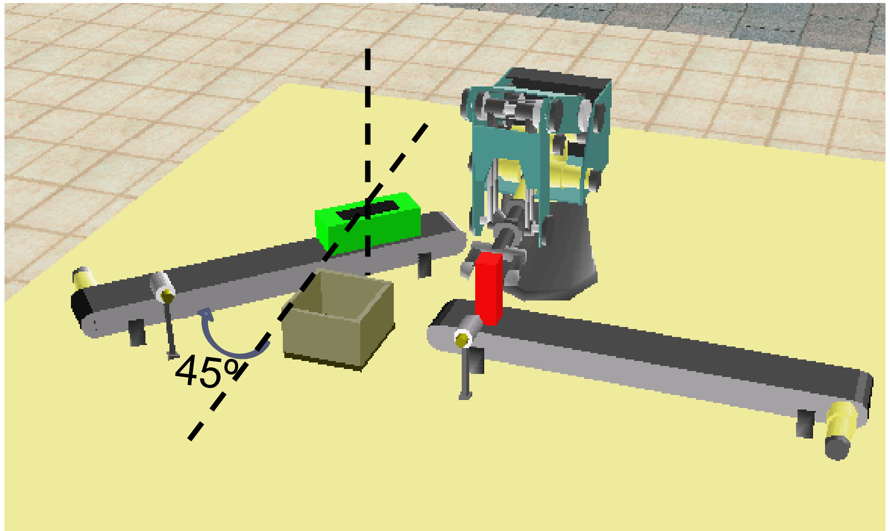




Jon Legarreta / Raquel Martinez

**4.3 ejercicio**

2) Se vio la necesidad de añadir un depósito para piezas defectuosas. Para ello se modificó la célula de trabajo tal y como se puede observar en la figura siguiente. ¿Cuales son las coordenadas de la pieza respecto a la nueva localización del contenedor?



1. Calcular la **MTH** correspondiente a los giros y desplazamientos que debe de realizar el extremo del robot (pinza, sistema {Sp}) para colocar el objeto en el canal del contenedor.

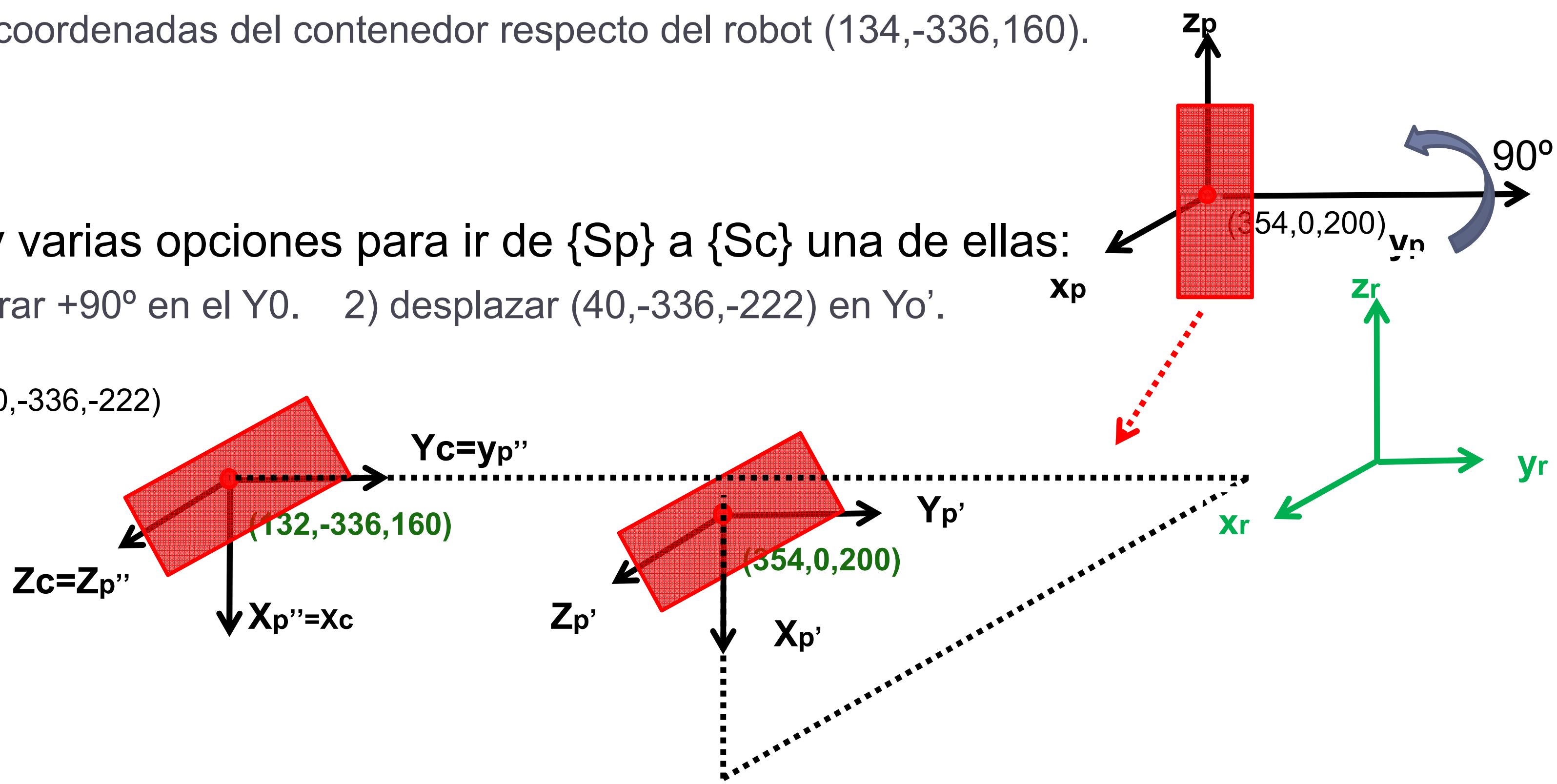
Las coordenadas de la pieza respecto del robot (354,0,200).

Las coordenadas del contenedor respecto del robot (134,-336,160).

- Hay varias opciones para ir de {Sp} a {Sc} una de ellas:

1) girar +90º en el Y0. 2) desplazar (40,-336,-222) en Yo'.

P=(40,-336,-222)



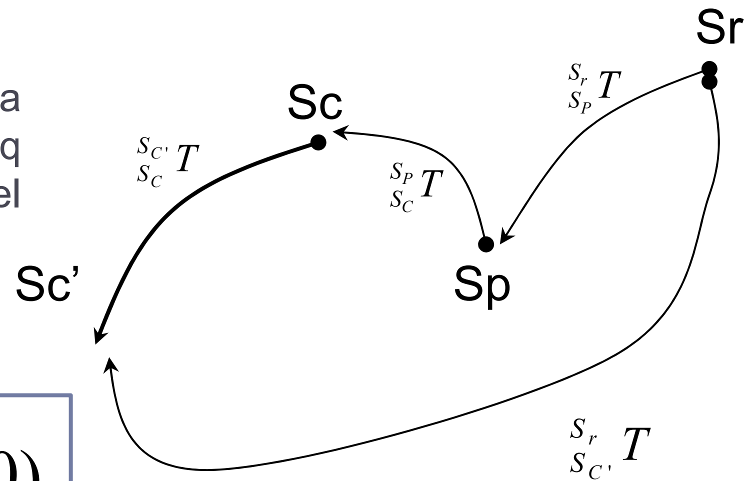
1) girar +90º en el Y0. 2) desplazar (40,-336,-222) en Yp'

$$ {}^{S_P}_{S_C}T = T(y,90^{\circ})T(40,-336,-222) $$

$$ {}^{S_P}_{S_C}T = \begin{bmatrix} C90 & 0 & S90 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S90 & 0 & C90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -336 \\ 0 & 0 & 1 & -222 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = $$

$$ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 0 & -336 \\ 0 & 0 & 1 & -222 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -222 \\ 0 & 1 & 0 & -336 \\ -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} $$

2. ¿Cuales son las coordenadas de la pieza respecto a la nueva localización del contenedor?



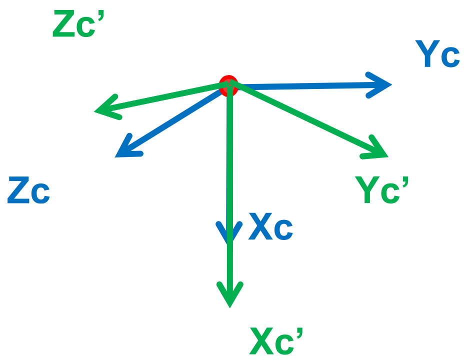

- Necesitamos las coord. de la pieza respecto de un sistema y la matriz q relaciones ambos dicho sistema con el nuevo sistema contendor.
- Sabemos las coordenadas de la Pieza respecto del sistema pieza {Sp} (0,0,0).

$$\boxed{{}^{S_{C'}}Pi = {}^{S_{C'}}_{S_P}T * {}^{S_P}Pi \text{ y } {}^{S_P}Pi = (0,0,0)}$$

$${}^{S_{C'}}_{S_P}T = \left({}^{S_P}_{S_{C'}}T\right)^{-1} = \left({}^{S_P}_{S_C}T\,{}^{S_C}_{S_{C'}}T\right)^{-1}$$

Otra forma

$${}^{S_{C'}}_{S_P}T = {}^{S_{C'}}_{S_C}T\,{}^{S_C}_{S_P}T = {}^{S_{C'}}_{S_C}T\left({}^{S_P}_{S_C}T\right)^{-1}$$




$$ {}^{S_P}_{S_{C'}}T = \left( {}^{S_{C'}}_{S_P}T \right)^{-1} = \left( {}^{S_C}_{S_P}T \, {}^{S_{C'}}_{S_C}T \right)^{-1} $$

- Para ir de {Sc} a {Sc'} ${}^{S_C}_{S_{C'}}T$ , hay que girar 45º en el eje. Xc

$$ {}^{S_C}_{S_{C'}}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C45 & -S45 & 0 \\ 0 & S45 & C45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S_{C'}}_{S_P}T = \left({}^{S_P}_{S_{C'}}T\right)^{-1} = \left({}^{S_P}_{S_C}T\,{}^{S_C}_{S_{C'}}T\right)^{-1} $$

$$ {}^{S_P}_{S_{C'}}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -222 \\ 0 & 1 & 0 & -336 \\ -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C45 & -S45 & 0 \\ 0 & S45 & C45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0.7 & -222 \\ 0 & 0.7 & -0.7 & -336 \\ -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S_{C'}}_{S_P}T = \left({}^{S_P}_{S_{C'}}T\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0.7 & -222 \\ 0 & 0.7 & -0.7 & -336 \\ -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -40 \\ 0.7 & 0.7 & 0 & 390.6 \\ 0.7 & -0.7 & 0 & -79 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

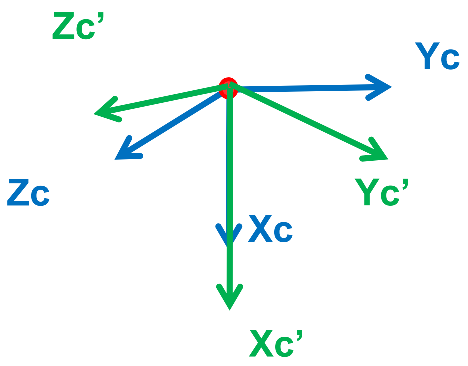
- Las coordenadas de la pieza respecto del nuevo contenedor son:

$$^{S_{C'}}Pi = {}^{S_{C'}}_{S_P}T * {}^{S_P}Pi \Leftrightarrow {}^{S_P}Pi = (0,0,0)$$

$$^{C'}Pi = {}^{C'}_{P}T * {}^{P}Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -40 \\ 0.7 & 0.7 & 0 & 390.6 \\ 0.7 & -0.7 & 0 & -79 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 390.6 \\ -79 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{^{C'}Pi = (-40,390.6,-79)}$$

## De la otra forma….




$$ {}^{S_{C'}}_{S_P}T = {}^{S_{C'}}_{S_C}T\,{}^{S_C}_{S_P}T = {}^{S_{C'}}_{S_C}T\left({}^{S_P}_{S_C}T\right)^{-1} $$

- Para ir de {Sc’} a {Sc} ${}^{S_{C'}}_{S_C}T$ , hay que girar -45º en el eje Xc`.

$$ {}^{S_{C'}}_{S_C}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C-45 & -S-45 & 0 \\ 0 & S-45 & C-45 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{S_{C'}}_{S_P}T = {}^{S_{C'}}_{S_C}T\,{}^{S_C}_{S_P}T = {}^{S_{C'}}_{S_C}T\left({}^{S_P}_{S_C}T\right)^{-1} $$

$$ {}^{S_{C'}}_{S_P}T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.7 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -222 \\ 0 & 1 & 0 & -336 \\ -1 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = $$

$$ {}^{S_{C'}}_{S_P}T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -40 \\ 0.7 & 0.7 & 0 & 390.6 \\ 0.7 & -0.7 & 0 & -79 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- Las coordenadas de la pieza respecto del nuevo contenedor son:

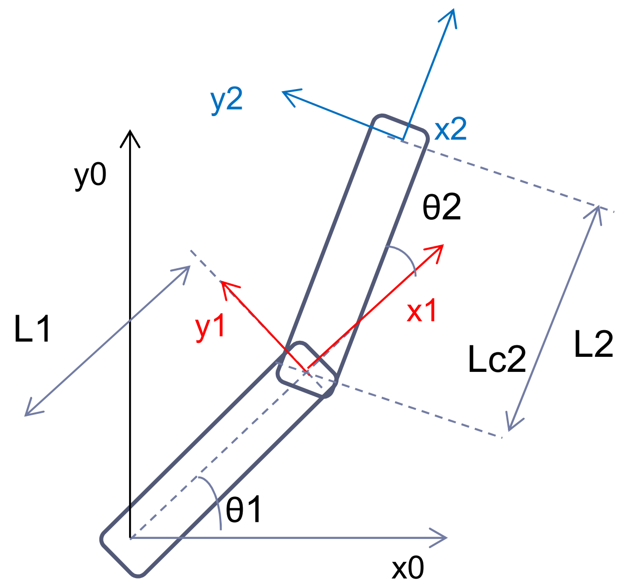
$$^{S_{C'}}Pi = {}^{S_{C'}}_{S_P}T * {}^{S_P}Pi \Leftrightarrow {}^{S_P}Pi = (0,0,0)$$

$$^{S_{C'}}Pi = {}^{S_{C'}}_{S_P}T * {}^{S_P}Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -40 \\ 0.7 & 0.7 & 0 & 390.6 \\ 0.7 & -0.7 & 0 & -79 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 390.6 \\ -79 \\ 1 \end{bmatrix}$$

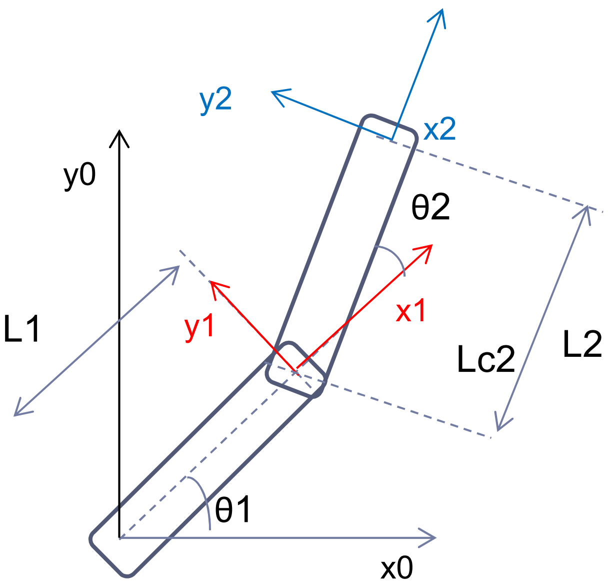
$$\boxed{^{S_{C'}}Pi = (-40,390.6,-79)}$$

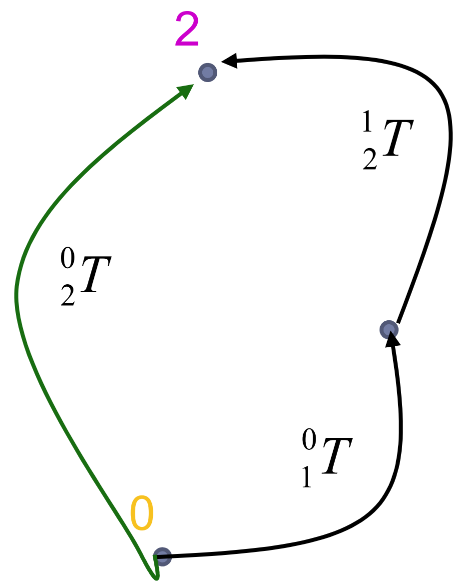
**4.4 ejercicio**

Obtener la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema de coordenadas {2} situado en el extremo del robot de 2 GDL con respecto de la referencia {0} situado en la base.



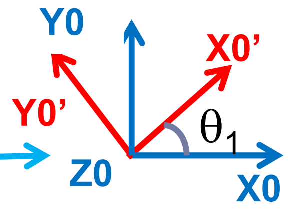
**4.4 ejercicio**
Obtener la matriz de transformación homogénea que relaciona el sistema de coordenadas {2} situado en el extremo del robot de 2 GDL con respecto de la referencia {0} situado en la base.



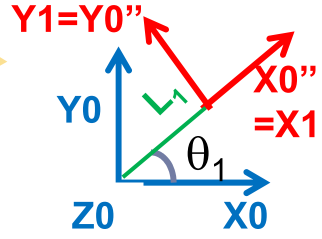
## Versión 1:

Obtenemos la matriz que relaciona el sistema {1} con el sistema



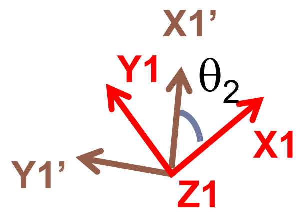

1 Giro un ángulo $\theta_1$ en el eje $Z_0$

2 Desplazo un vector $p(L_1,0,0)$



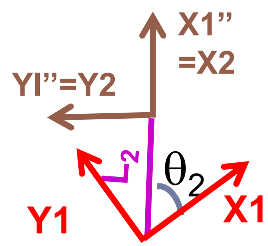

$$ {}^0_1T = T(z,\theta_1)T(p) = \overset{1}{\begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & L_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & L_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Obtenemos la matriz que relaciona el sistema {2} con el sistema {1}:




1 Giro un ángulo $\theta_2$ en el eje $Z_1$

2 Desplazo un vector $p(L_2,0,0)$




$$ {}^1_2T = T(z,\theta_2)T(p) = \overset{1}{\begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

## Versión 1:

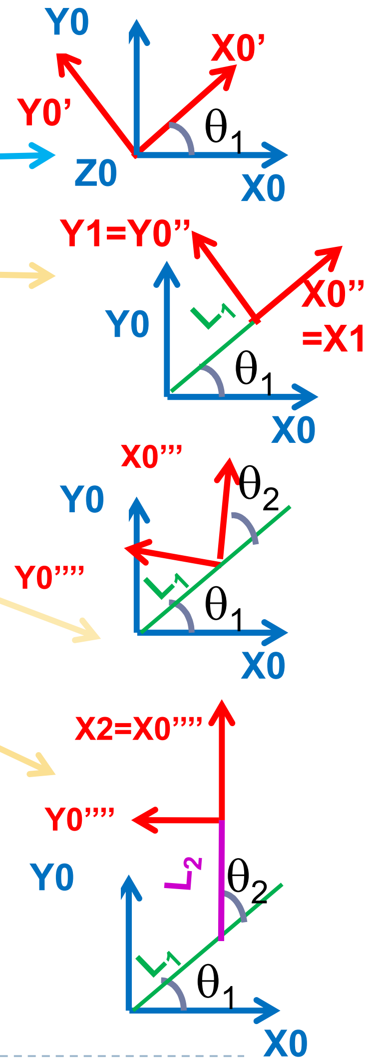
La matriz que relaciona el sistema {0} con el sistema {2} es por lo tanto:

$$ {}^{0}_{2}T = {}^{0}_{1}T * {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & L_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & L_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

## Versión 2:

Obtenemos la matriz que relaciona el sistema {2} con el sistema

1. Giro un ángulo $\theta_1$ en el eje $Z_0$
2. Desplazo un vector $p(L_1,0,0)$
3. Giro un ángulo $\theta_2$ en el eje $Z_1$
4. Desplazo un vector $p(L_2,0,0)$




$$
{}^0_2T=\overset{\boxed{1}}{\begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\overset{\boxed{2}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\overset{\boxed{3}}{\begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\overset{\boxed{4}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

## Versión 3:

Obtenemos la matriz que relaciona el sistema {1} con el sistema {0}:

1 Desplazo un vector p$(L_1C\theta_1, L_1S\theta_1, 0)$

2 Giro un ángulo $\theta_1$ en el eje Z0'

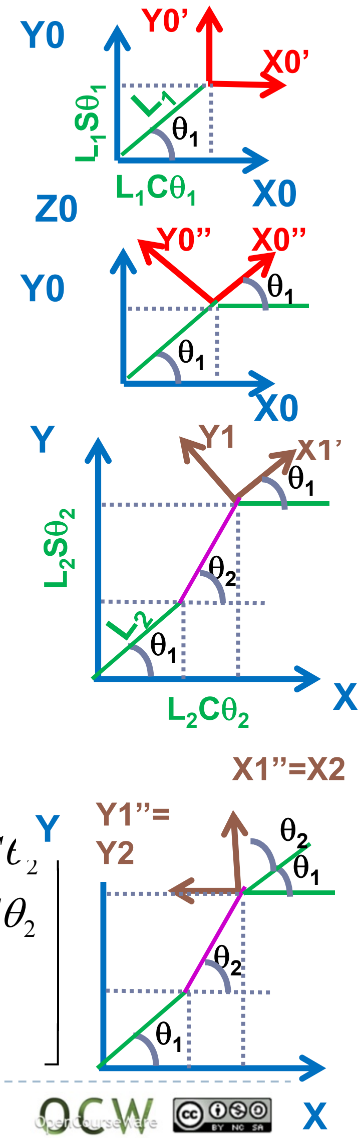
$$
{}^{0}_{1}T = T(p)T(z,\theta_1) = \overset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1C\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & L_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{2}{\begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & L_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & L_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Obtenemos la matriz que relaciona el sistema {2} con el sistema {1}:

1 Desplazo un vector p$(L_2C\theta_2, L_2S\theta_2, 0)$

2 Giro un ángulo $\theta_2$ en el eje Z1

$$
{}^{1}_{2}T = T(p)T(z,\theta_2) = \overset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{2}{\begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$



## Versión 3

La matriz que relaciona el sistema {0} con el sistema {2} es por lo tanto:

$$
{}^{0}_{2}T = {}^{0}_{1}T * {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & L_1C\theta_1 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & L_1S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & L_2C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & L_2S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

## Versión 4:

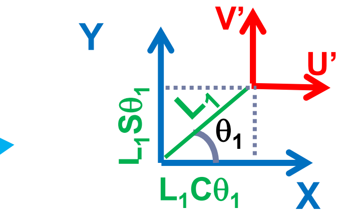
Obtenemos la matriz que relaciona el sistema {2} con el sistema {0}:

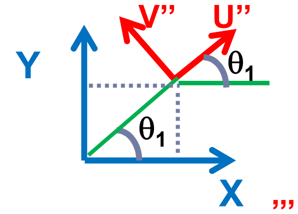
1 Desplazo un vector p( $L_1 C\theta_1, L_1 S\theta_1, 0$ )

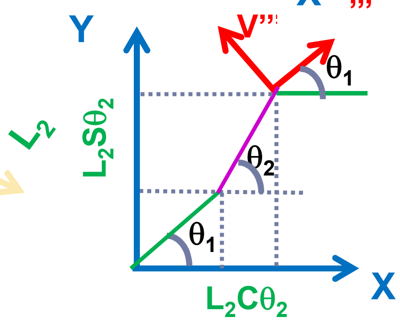
2 Giro un ángulo $\theta_1$ en el eje Z0

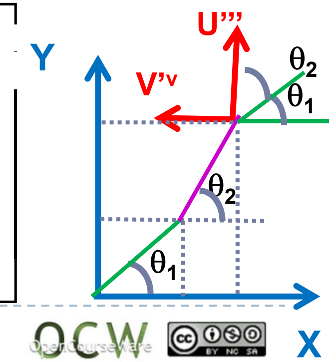
3 Desplazo un vector p( $L_2 C\theta_2, L_2 S\theta_2, 0$ )

4 Giro un ángulo $\theta_2$ en el eje Z1




$$
{}^{0}_{2}T = \overset{1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 C\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 S\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{2}{\begin{bmatrix} C\theta_1 & -S\theta_1 & 0 & 0 \\ S\theta_1 & C\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_2 C\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 & L_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{4}{\begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & 0 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$