

## 8

# INTRODUCCION AL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

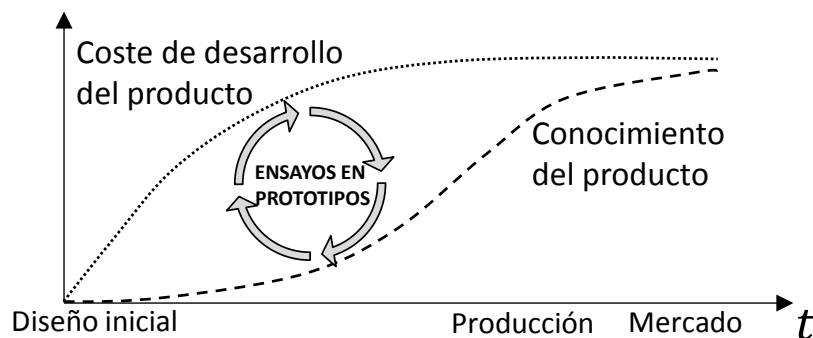
## 1. DESARROLLO DE PRODUCTO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS. MODELO TRADICIONAL VS MODELO ACTUAL

Tradicionalmente el proceso o desarrollo de un producto se ha basado en un “intuitivo” diseño conceptual e innumerables ensayos en prototipos. Se partía de un diseño conceptual a partir del cual se desarrollaba un diseño detallado. A continuación se construía uno o varios prototipos, que se ensayaban repetidamente simulando las condiciones de servicio a las que la pieza o elemento iba a estar sometida durante su vida útil.

Si la respuesta del prototipo era satisfactoria, el diseño se daba como definitivo (se podían incluso realizar más ensayos para optimizar el diseño mientras el dinero y tiempo disponible lo permitieran). Si al contrario la respuesta no era satisfactoria, se trataban de resolver los problemas introduciendo el mínimo número de cambios posible en el diseño a

fin de no incrementar demasiado el tiempo y coste de desarrollo del producto (había que modificar y reensayar el prototipo).

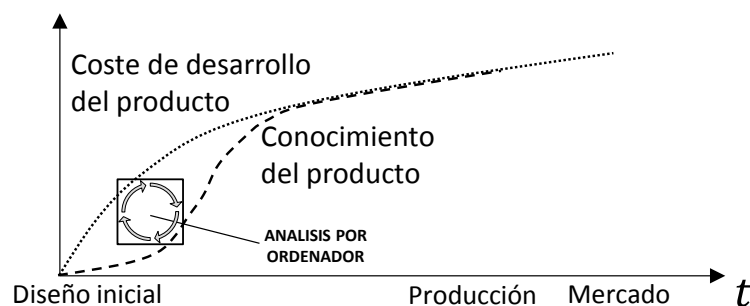
Esta filosofía de desarrollo de producto implica un gran hueco entre el conocimiento del producto y el coste de desarrollo del mismo durante la mayor parte del tiempo comprendido entre el diseño conceptual y la salida al mercado del producto. Y es que, hasta bien avanzada la fase de ensayos de prototipos (con los correspondientes gastos), apenas se conoce su comportamiento ante las condiciones de servicio. La Figura 1 esquematiza lo explicado.



*Figura 1. Modelo tradicional de desarrollo de producto.*

Actualmente el proceso o desarrollo de un producto trata de minimizar ese hueco entre el conocimiento del producto y el coste de desarrollo del mismo con el objetivo de reducir gastos y tiempo de desarrollo, y asimismo generar productos mejores.

La herramienta básica para ello es el análisis por ordenador, que permite entender el comportamiento del producto con mayor rapidez y versatilidad y menos coste que los ensayos de prototipos en los que se basaba el modelo tradicional (ver Figura 2). En efecto, se pueden estudiar muchos casos de carga, probar diseños alternativos, etcétera de una manera ágil y económica en términos de tiempo y dinero. De esta manera, en principio el ensayo en prototipos tiene únicamente la función de verificar el diseño obtenido por ordenador.



*Figura 2. Modelo actual de desarrollo de producto.*

Mikel Abasolo, Santiago Navalpotro, Edurne Iriondo y Javier Corral

Esta última afirmación es discutible o cuanto menos matizable, ya que la validez de los resultados obtenidos por ordenador depende de que el modelo de ordenador esté correctamente definido (material, cargas...), de conocer las limitaciones del método de análisis empleado por el ordenador, de tener los conocimientos de ingeniería necesarios para saber interpretar los resultados, etcétera. Además, muchos tipos de análisis, como por ejemplo los análisis a fatiga explicados en el capítulo anterior, requieren de ensayos experimentales debido a su complejidad y/o dispersión. No obstante lo que sí es cierto es que el análisis por ordenador, adecuadamente planificado y ejecutado, permite reducir más o menos drásticamente el número de ensayos en prototipos.

De entre los diversos métodos de análisis por ordenador, el más utilizado actualmente en el campo de la ingeniería mecánica es el Método de los Elementos Finitos (MEF).

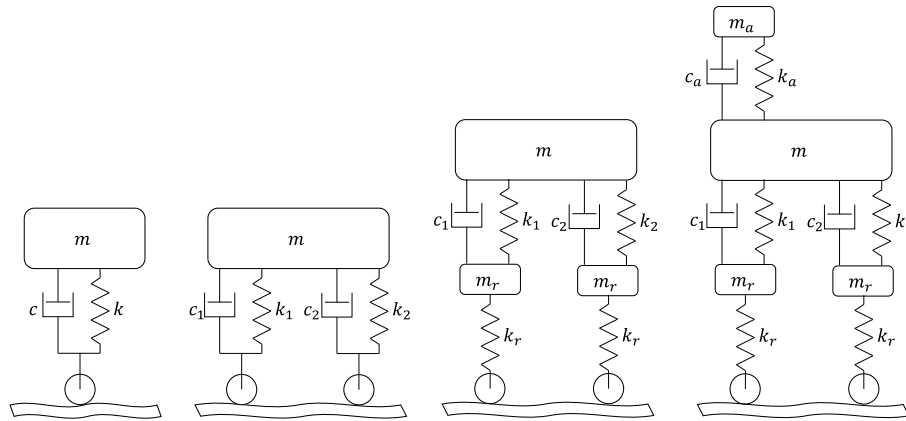
## 2. COMPROMISO PRECISIÓN-COSTE DE UN MODELO

---

El estudio de cualquier sistema físico bajo solicitaciones exige usar modelos simplificados como ábacos, tablas, métodos analíticos, métodos numéricos... En cualquier caso, un modelo debe mantener un compromiso entre complejidad y coste de análisis.

Por ejemplo, para analizar la dinámica vertical de un vehículo que avanza a través de una carretera irregular, entre otros se pueden emplear los modelos de la Figura 3. El primer modelo (el de más a la izquierda) consta de un único grado de libertad, mientras el segundo, tercer y cuarto modelo tiene 2, 4 y 5 grados de libertad respectivamente. Cuantos más grados de libertad tiene el modelo, más preciso es, en el sentido que permite conocer más detalladamente el comportamiento del sistema: por ejemplo, el segundo modelo es capaz de analizar el movimiento de vaivén longitudinal (el primer modelo no puede), y el cuarto es capaz de simular incluso el movimiento vertical del conductor respecto al chasis (los tres primeros no pueden).

Sin embargo, a mayor complejidad del modelo, no sólo aumenta su precisión, también lo hace el coste del análisis del mismo. Así, el mejor modelo es aquel que nos ofrece la información que necesitamos con la mayor precisión y menor coste posible; siguiendo con el ejemplo de la Figura 3, si no interesa conocer el movimiento del conductor no tiene sentido analizar el cuarto modelo.



**Figura 3. Diferentes modelos para estudiar la dinámica vertical de un vehículo.**

La ventaja que presentan los ordenadores es que permiten efectuar cálculos muy complejos (y con ello muy precisos) a una gran velocidad (es decir, con un coste muy reducido). De esta forma, el auge del Método de Elementos Finitos comenzó en los años 50 coincidiendo con el auge de los ordenadores. Actualmente hay muchos programas comerciales en el mercado, con los que se pueden hacer análisis estáticos y dinámicos, lineales y no lineales, de vibraciones libres y forzadas, impactos, análisis térmicos, de pandeo, acústicos, electrostáticos, magnéticos, de dinámica de fluidos...

### 3. BASE INTUITIVA DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Según se ha comentado en el apartado anterior, el auge del MEF se ha producido a partir de la década de 1950, pero ello no significa que la base teórica del MEF se desarrollara en esa época; la idea básica del MEF es la misma que se utiliza en el cálculo de celosías, que data del siglo XIX. No obstante, hasta los años 50 el MEF era poco útil porque no se disponía de la capacidad de cálculo rápido y preciso que aporta un ordenador. De hecho, los ordenadores no sólo aportan capacidad de cálculo sino también capacidad gráfica para poder visualizar los modelos y sus resultados de una forma cómoda y ágil.

La idea básica del MEF es muy sencilla: igual que se hace en el cálculo de celosías, el MEF se basa en discretizar el medio continuo en elementos finitos de propiedades conocidas. En el cálculo de celosías, el medio continuo (la celosía) se discretiza en elementos finitos (barras) de propiedades conocidas (longitud  $L$ , área  $A$  y módulo de elasticidad  $E$ ). La Figura 4 muestra un ejemplo. Los puntos de unión se denominan nodos, y cada nodo tiene un determinado número de grados de libertad (gdl); en el caso de la celosía cada nodo tiene dos gdl, los desplazamientos en dirección  $x$ ,  $y$ .

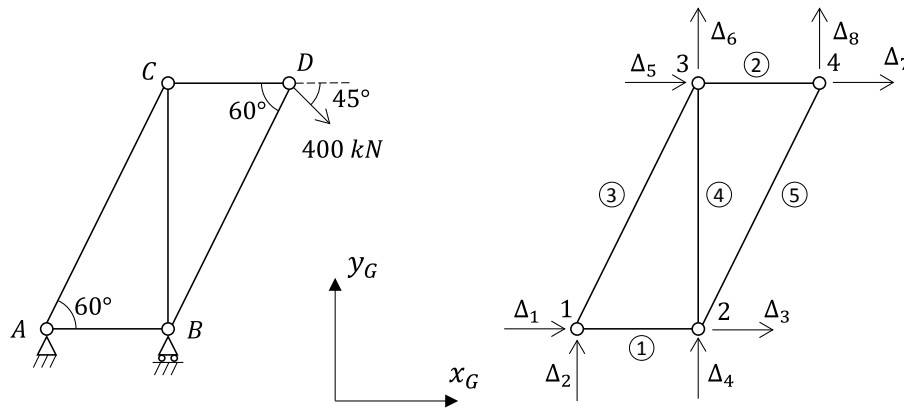


Figura 4. Discretización del medio continuo (celosía) en elementos finitos (barras) de propiedades conocidas ( $E, A, L$ ).

En un cálculo estático como éste, se trata de resolver la ecuación  $\{F\}=[K]\cdot\{\Delta\}$ . Los vectores  $\{F\}$  y  $\{\Delta\}$  contienen las fuerzas y desplazamientos de los gdl del modelo:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{Bmatrix}$$

Donde en el ejemplo de la Figura 4,  $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_4=0$ ,  $F_3=F_5=F_6=0$ ,  $F_7=400\cdot\cos(45)$ ,  $F_8=-400\cdot\sin(45)$ .

La matriz de rigidez de la celosía se calcula a partir de la matriz de rigidez de cada uno de los elementos barra en los que se ha discretizado. Y es que la rigidez de un elemento barra es conocida: su valor es  $k=EA/L$  en la dirección de la barra y  $k=0$  en la dirección perpendicular a la barra. Así, y teniendo en cuenta que los desplazamientos son los correspondientes a los gdl de la Figura 4, la matriz de rigidez de la celosía es:

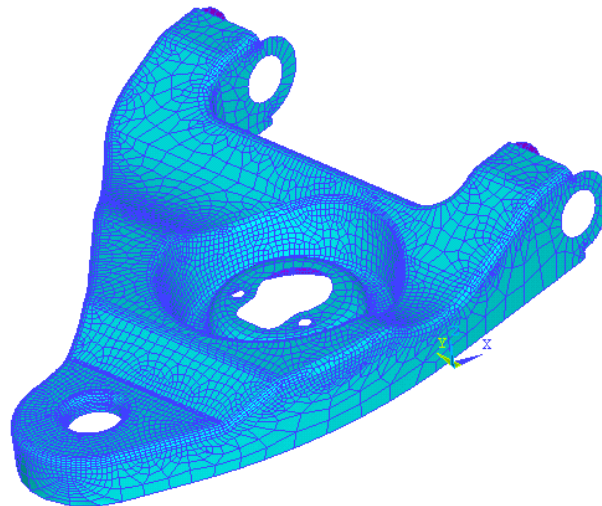
$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L}\cos^2\alpha & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L}\cos^2\alpha & -\frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{EA}{L}\sin^2\alpha & 0 & 0 & -\frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{EA}{L}\sin^2\alpha & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L}\cos^2\alpha & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 & -\frac{EA}{L}\cos^2\alpha & -\frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L}\sin^2\alpha & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{EA}{L}\sin^2\alpha \\ -\frac{EA}{L}\cos^2\alpha & -\frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & 0 & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L}\cos^2\alpha & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{EA}{L}\sin^2\alpha & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L}\sin^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L}\cos^2\alpha & -\frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} + \frac{EA}{L}\cos^2\alpha & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha \\ -\frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & -\frac{EA}{L}\sin^2\alpha & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{EA}{L}\sin^2\alpha & 0 & 0 & \frac{EA}{L}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{EA}{L}\sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

Donde se observa por ejemplo que la barra 1 (entre los nodos 1 y 2) aporta una rigidez

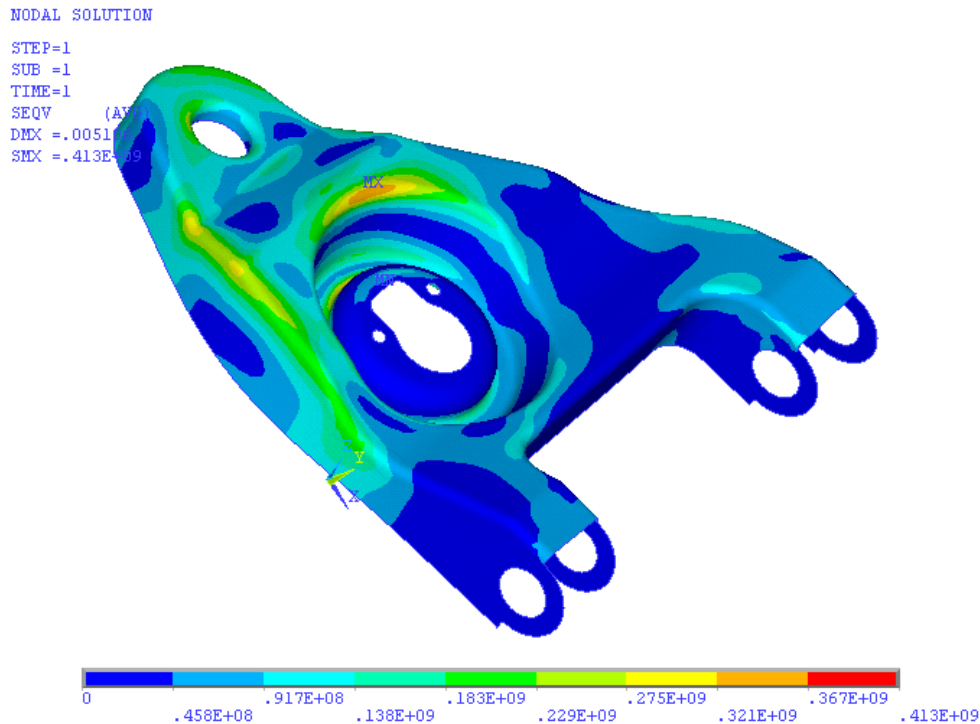
$k=EA/L$  a los gdl 1 y 3, y  $k=0$  a los gdl 2 y 4 del sistema.

Una vez construida la ecuación estática del modelo, se resuelve y se obtienen como resultado las reacciones en los apoyos y los desplazamientos de los nodos.

Esta es la forma de proceder del MEF. Así, si se quiere analizar una pieza compleja como la de la Figura 5 (triángulo de suspensión de un automóvil), se discretiza en elementos finitos de propiedades conocidas (la rigidez de estos elementos de tipo triángulo y cuadrilátero no es tan sencilla como la rigidez  $k=EA/L$  de un elemento barra, pero se puede calcular); a partir de estos elementos, se calcula la matriz de rigidez del modelo discretizado; finalmente, se obtienen las reacciones y desplazamientos de los gdl del modelo (en este caso cada nodo tiene 3 gdl, translaciones en x, y, z). Si bien el análisis de la celosía de la Figura 4 puede hacerse a mano porque su ecuación  $\{F\}=[K]\{\Delta\}$  es relativamente pequeña y fácil de obtener y resolver, es impensable analizar a mano la pieza de la Figura 5 por su elevada complejidad; no obstante, el ordenador construye y resuelve la ecuación sin dificultad. El ordenador permite además visualizar los resultados de forma cómoda, lo cual facilita la interpretación de los resultados; la Figura 6 muestra por ejemplo las tensiones de Von Mises tras aplicar unas determinadas fuerzas a la pieza (las tensiones se calculan a partir de los desplazamientos de los gdl).



**Figura 5. Discretización del medio continuo (triángulo de suspensión) en elementos finitos (triángulos y cuadriláteros) de propiedades conocidas.**



*Figura 6. Visualización de resultados (tensión de Von Mises) del triángulo de suspensión de la Figura 5.*

## 4. ORGANIZACIÓN DE UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

Los programas de análisis por EF están formados por 3 partes principales: preprocesador, procesador y postprocesador. En los puntos siguientes se describe en qué consiste cada una de estas tres partes, y se subrayan los aspectos a tener en cuenta a la hora de abordar el análisis de una pieza o elemento.

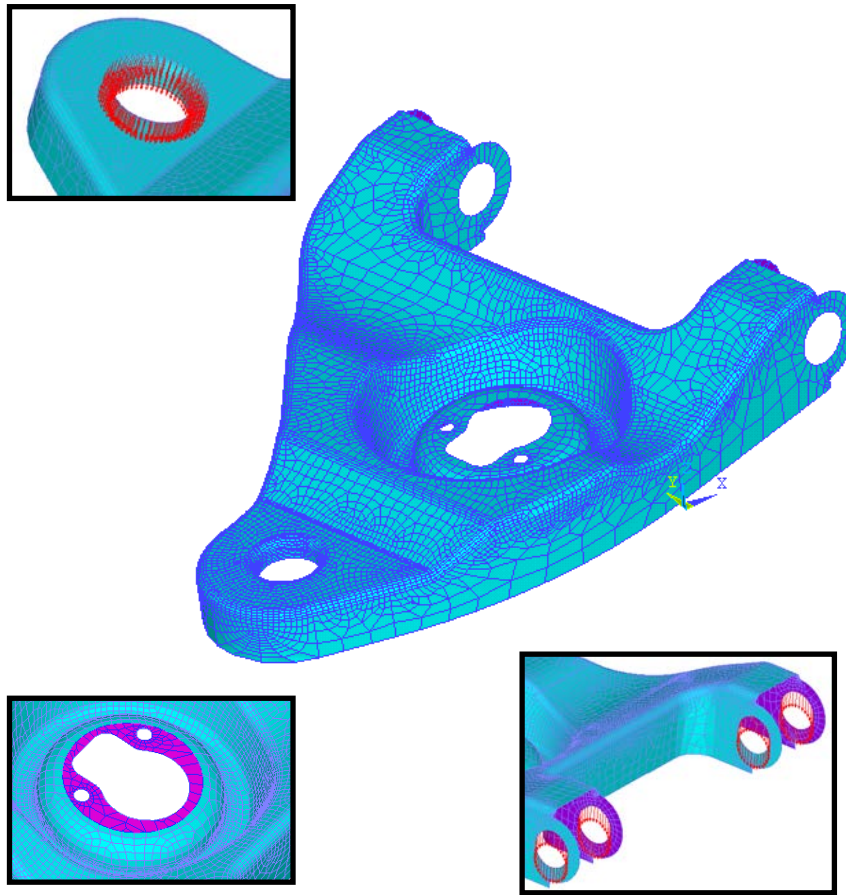
Antes de continuar, hay que dejar claro que el MEF es una herramienta de análisis y no de diseño. El programa “únicamente” analiza la pieza que el analista ha definido (con su geometría, malla, cargas, condiciones de contorno...) y calcula y visualiza su respuesta en términos de deformación, tensión o lo que corresponda. En ningún caso el programa diseña la pieza desde cero (eligiendo la geometría, material...) para que cumpla unos determinados valores admisibles de deformación, tensión o lo que corresponda.

### 4.1 PREPROCESADOR

El preprocesador es la parte en la que se define el material, la geometría, cargas y condiciones de contorno de la pieza que se va a analizar. Es también donde se discretiza el medio continuo en elementos finitos, proceso que se denomina “mallado”. La Figura 7 muestra la geometría, condiciones de contorno, cargas y mallado del triángulo de



suspensión de la Figura 5.



*Figura 7. Geometría, condiciones de contorno, cargas y mallado (preprocesado) del triángulo de suspensión de la Figura 5.*

#### 4.1.1 GEOMETRIA

El primer paso a la hora de definir la geometría del modelo es establecer claramente el objetivo del análisis. El modelo y el tipo de análisis serán diferentes en función de lo que se quiera obtener. Supóngase por ejemplo que se quiere analizar por EF el rodamiento de vuelco de la Figura 8, muy empleado en grúas y aerogeneradores entre otras aplicaciones.

Si por ejemplo se quiere obtener cuánto se desplaza el anillo exterior cuando se le aplica una fuerza (anillo interior atornillado al soporte fijo), las bolas pueden ser modeladas mediante muelles con una rigidez equivalente (ver Figura 9). De esta forma, en vez de usar varios elementos tridimensionales que conforman la bola, se usan elementos muelle (similares al elemento barra) de manera que al tener menos gdl el coste computacional del análisis es mucho menor (además nos ahorramos definir contactos bola-pista, que dispararían todavía más el coste computacional). A cambio, no podremos saber cómo es la zona de contacto bola-pista, ni las presiones que se dan en ella. No obstante, sí se obtiene



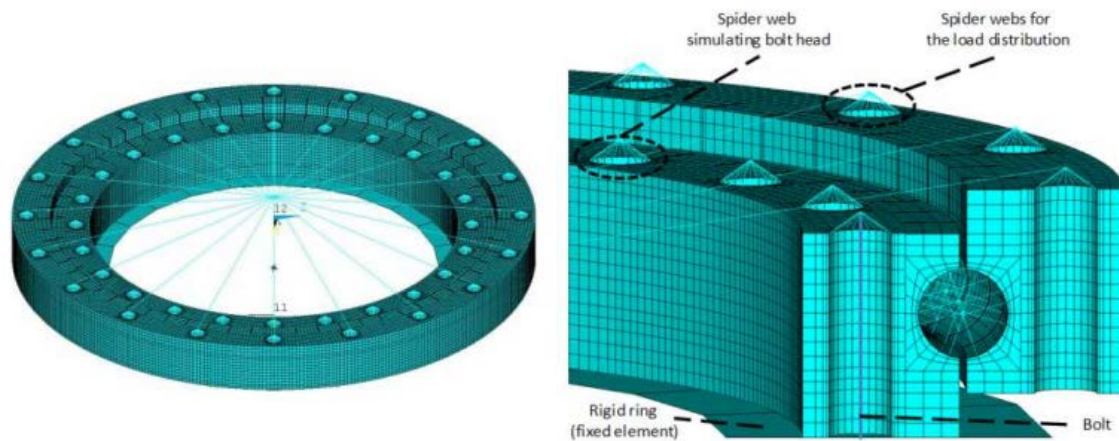
con precisión el desplazamiento del anillo exterior respecto al interior, que es lo que se quiere determinar con este análisis. En esta línea obsérvese también que los tornillos han sido modelados como elementos viga, con lo que no podremos conocer con exactitud qué sucede en el contacto tuerca-anillo interior ni en el contacto entre roscas, pero tampoco nos importa; modelar el tornillo perfectamente no nos aporta más precisión en el cálculo del desplazamiento del anillo exterior respecto al interior, sólo incrementaría el coste computacional innecesariamente.

Si lo que se quiere conocer es el estado de la zona de contacto, en ese caso evidentemente se deben modelar las bolas; además, para detectar con precisión qué es lo que sucede en la zona de contacto bola-pista, ésta debe discretizarse con una malla considerablemente más refinada. La Figura 10 muestra el modelo a utilizar en este caso, donde se observa además la zona elíptica de contacto con un mayor refinado. En definitiva, y tal y como se ha comentado, el modelo y el tipo de análisis serán diferentes en función de lo que se quiera obtener: el modelo no tiene por qué ser lo más similar al sistema físico real, sino que se tiene que adaptar a nuestras necesidades con una relación precisión-coste aceptable.

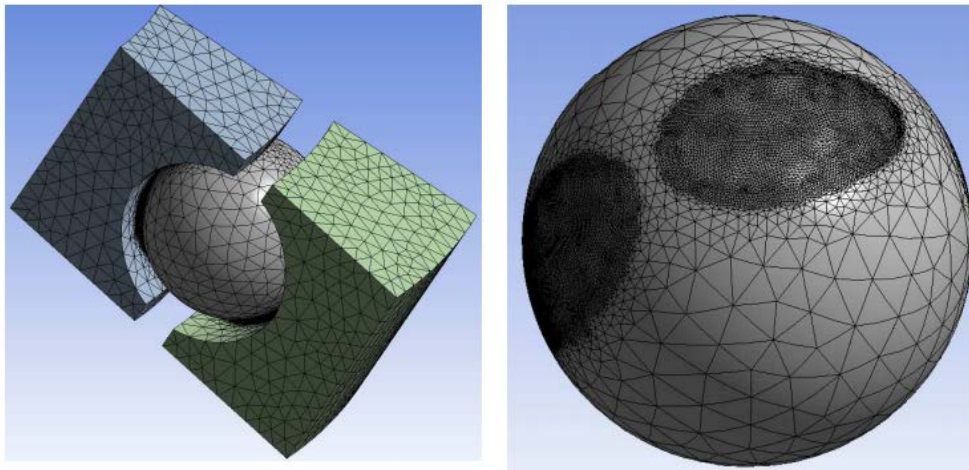
Otro ejemplo sería, sin ir más lejos, la celosía de la Figura 4. El modelo que se debe usar está formado por 5 elementos barra unidas entre sí con articulaciones, tal y como se ha comentado. Modelar las barras de la celosía con elementos tridimensionales, las uniones entre barras como chapas atornilladas, etcétera, no tiene ningún sentido ya que no añade precisión a los resultados y sólo aumenta sensiblemente el coste del análisis.



*Figura 8. Rodamiento a analizar por EF*



*Figura 9. Modelo del rodamiento de la Figura 9 para el cálculo del desplazamiento del anillo exterior cuando se le aplica una fuerza (anillo interior fijado al soporte fijo).*



*Figura 10. Modelo del rodamiento de la Figura 9 para el estudio de la zona de contacto bola-pista (superficie de contacto, presiones...).*

Siempre que sea posible se deben aprovechar simetrías, condiciones de tensión plana, deformación plana, etcétera y demás herramientas para minimizar el coste del análisis sin perder precisión. Por ejemplo, en lugar de analizar la pieza de la Figura 11a, se puede analizar la pieza de la Figura 11b aprovechando su condición de tensión plana y simetría.

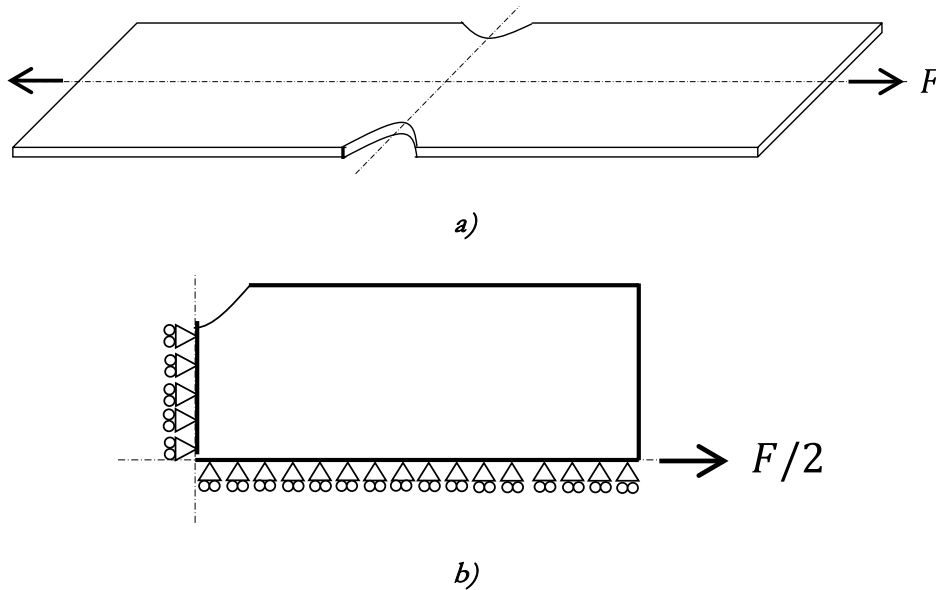


Figura 11. a) pieza a estudiar b) modelo 2D de tensión plana con simetría.

#### 4.1.2 CARGAS Y CONDICIONES DE CONTORNO

Aunque introducir las cargas y condiciones de contorno en el modelo parezca sencillo, es un proceso que requiere mucha atención. Muchas veces es difícil estimar las cargas que va a soportar una pieza o elemento durante su funcionamiento, como por ejemplo las cargas de viento sobre una estructura o las fuerzas en una suspensión de automóvil. Si las cargas introducidas no son las que realmente soportará la pieza durante su vida (o al menos algo equivalente), los resultados del análisis de EF no serán válidos. Lo mismo sucede con las condiciones de contorno; suponer un apoyo rígido cuando no lo es, o errores similares, conducen a resultados no válidos.

Se recuerda que, según se ha visto en el apartado anterior, el programa de EF traslada las cargas y condiciones de contorno a los gdl del modelo, ya que la ecuación que resuelve está referida a los gdl.

#### 4.1.3 MALLADO

En lo referente al mallado, cuanto más pequeños sean los elementos, más nodos y por tanto más gdl tiene el modelo; tal y como se ha explicado para la Figura 3, esto implica una mayor precisión pero también un mayor coste de análisis. Así, el tamaño de elemento debe cumplir un compromiso entre precisión y coste. En este sentido, en las zonas de concentración de tensiones se requiere una malla más refinada (elementos más pequeños) para que los resultados reflejen con precisión los efectos de dicha concentración de

tensiones (es previsiblemente en estas zonas donde se va a dar la tensión máxima en la pieza, por lo que es necesario tener precisión); las zonas donde no hay concentración de tensiones tienen a priori una tensión menor, con lo que no son tan críticas, por lo que nos podemos permitir tener una malla menos refinada al no necesitar tanta precisión. Lo que se acaba de comentar se puede observar claramente en la Figura 7, donde las zonas de cambio de forma de la pieza (zonas de concentración de tensiones) tienen una mayor densidad de elementos (elementos más pequeños).

En cuanto a los tipos de elementos finitos, existen varios tipos a emplear en función de las necesidades: elementos barra, viga, triángulo, cuadrilátero, tetraedro, hexaedro, elementos de orden superior, cáscara, etcétera son los más habituales, aunque cualquier programa de EF dispone de varias decenas de tipos de elementos entre los que el analista debe elegir según le convenga. La Figura 12 muestra algunos de estos elementos.

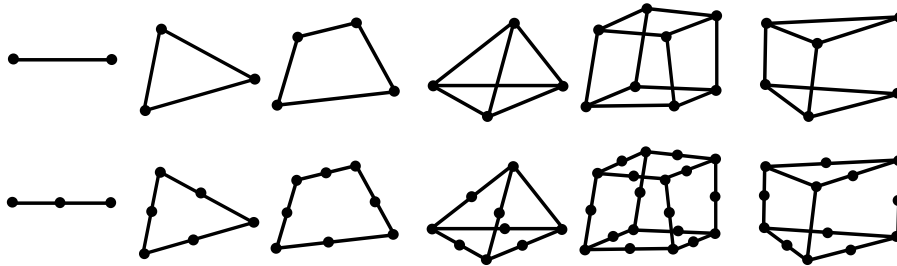


Figura 12. Algunos tipos de elementos finitos disponibles en un programa de EF.

#### 4.1.4 MATERIAL

Si se está realizando un análisis estático elástico lineal las únicas propiedades del material que nos interesan son el módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson; si el análisis es estático elasto-plástico necesitaremos además todos los parámetros necesarios para definir su curva  $\sigma$ - $\epsilon$ . Si el análisis es dinámico, además de las propiedades de rigidez habrá que definir además las propiedades de masa y amortiguamiento del material. Si el material no es homogéneo e isótropo como el acero, la definición del material se complica.

## 4.2 PROCESADOR

El preprocesador es la parte en la que el programa de EF construye y resuelve la ecuación del modelo definido y discretizado en el preprocesador (en el caso de un análisis estático,  $\{F\} = [K] \cdot \{\Delta\}$ ). Se recuerda que el tamaño de las matrices es igual al número de grados de libertad del modelo, de manera que cuantos más nodos (malla más refinada), más preciso es el resultado pero más tarda el ordenador en resolver la ecuación (mayor coste

computacional del análisis).

### 4.3 POSTPROCESADOR

El postprocesador es la parte en la que el programa de EF ofrece las herramientas para visualizar los resultados obtenidos del procesador, con el objetivo de ayudar a conocer e interpretar la respuesta del modelo ante las solicitaciones impuestas. En el caso de un análisis estático, los resultados a visualizar e interpretar son las deformaciones y las tensiones.

Es en este punto donde, en función de los resultados el analista decide si la pieza es válida o no, y si no lo es decide cómo puede ser rediseñada. Tómese como ejemplo los resultados del triángulo de la suspensión mostrados anteriormente en la Figura 6. Supóngase que la pieza es de un acero dúctil con tensión de fluencia  $\sigma_{yp}=250$  MPa. La Figura 6 indica que la tensión máxima en la pieza es de 413 MPa, y aparece como cabría esperar en una zona de concentración de tensiones. Siguiendo los conceptos explicados en el Tema de concentración de tensiones, en materiales dúctiles una tensión máxima superior a la tensión de fluencia no implica necesariamente el fallo de la pieza; la pieza puede seguir teniendo una deformación admisible aun cuando haya pequeñas zonas plastificadas. Según se vio en el mencionado Tema, una forma simplificada y generalmente aceptada de estimar si se da el fallo es comparando la tensión nominal con la tensión de fluencia. Desafortunadamente, en una pieza como la que se está analizando no se puede (o al menos no es fácil) determinar la tensión nominal, por lo que este criterio no es aplicable. Es más, aunque se pudiera calcular la tensión nominal, decíamos que esto no es más que un cálculo aproximado. Y es que, citando lo explicado en aquel Tema, en un material dúctil se considera que el fallo se da porque aparecen deformaciones permanentes “grandes” que inhabilitan a la pieza para cumplir la misión para la cual ha sido diseñada. Qué se entiende por deformaciones permanentes “grandes” depende de la aplicación, de manera que para una pieza un determinado nivel de deformación puede ser admisible en una aplicación y no admisible en otra. El MEF nos permite visualizar la deformación que experimenta la pieza y estimar si esas deformaciones son admisibles o no en la aplicación concreta que vaya a tener la pieza.

En definitiva, debe quedar claro que la interpretación de resultados en el postprocesador es uno de los aspectos más importantes del análisis por EF de una pieza. Para llevarla a cabo correctamente, el analista debe tener conocimiento de ingeniería y del MEF, y ser consciente de las características y particularidades de su modelo.

Finalmente, tal y como se ha explicado en la introducción de este Tema, debe tenerse en

cuenta que los resultados del análisis de EF no siempre son definitivos. Por ejemplo, los resultados de un cálculo de celosía sí pueden considerarse concluyentes, ya que la geometría es sencilla, las cargas en general también lo serán, el análisis estático es sencillo (sólo participa la rigidez, que en las barras es  $EA/L$ ); sin embargo, los resultados de un cálculo de una pieza a fatiga no son concluyentes, porque influyen muchos factores cuya influencia es difícil de estimar (acabado superficial, nivel de impactos, soldaduras...) y porque existe una gran dispersión en los resultados. En estos casos, es imprescindible realizar ensayos experimentales a posteriori, sobre todo si la pieza es crítica. Es decir, además de saber interpretar los resultados del análisis, hay que ser consciente del “alcance” de los mismos a efectos de valorar hasta qué puntos son definitivos.