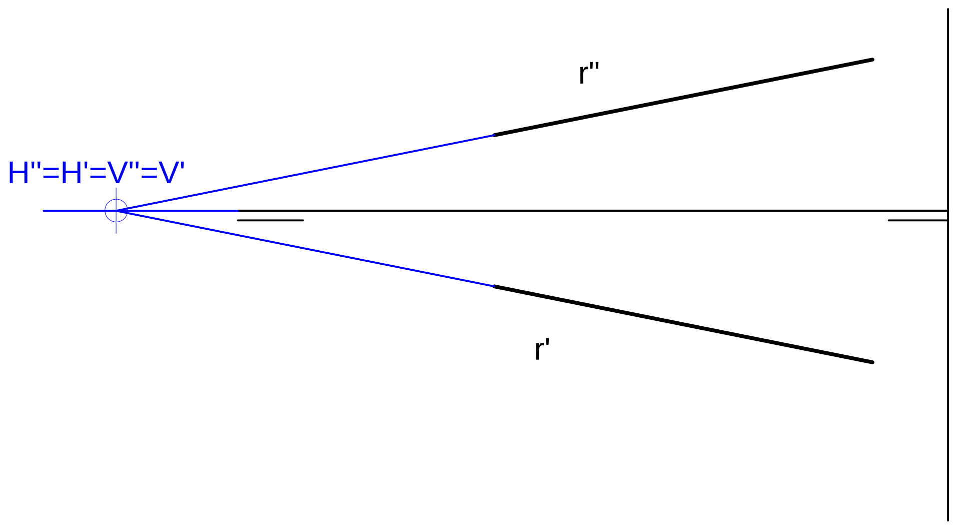
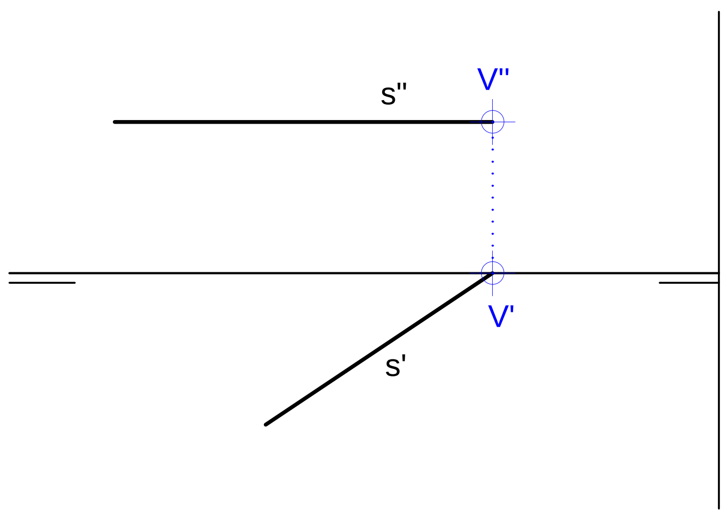
1 ARIKETA

Kalkulatu $r: \begin{cases} x+3y=13 \\ y=z \end{cases}$ *eta* $s: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *zuzenen ebakidura XOY eta XOZ planoekin.*

Zehaz itzazu r eta s zuzenen trazak





EZ DAUKA TRAZA HORIZONTALIK PH-REKIKO PARALELOA DELAKO

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

1 ARIKETA

Kalkulatu $r: \begin{cases} x + 3y = 13 \\ y = z \end{cases}$ *eta* $s: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *zuzenen ebakidura XOY eta XOZ planoekin.*

Ebazpena:

Zuzen baten eta plano baten ebakidura kalkulatzeko nahikoa da zuzenaren eta planoaren ekuazioek sortzen duten sistema ebaztea. Ondoren eskatutako ebakidurak kalkulatzen dira:

- r zuzenaren eta XOY planoaren arteko ebakidura:

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ y = z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

r zuzenaren eta XOY planoaren arteko ebakidura $(13,0,0)$ puntua da.

- r zuzenaren eta XOZ planoaren arteko ebakidura:

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ y = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

r zuzenaren eta XOZ planoaren arteko ebakidura $(13,0,0)$ puntua da.

- s zuzenaren eta XOY planoaren arteko ebakidura*:*

Ebakidura hau kalkulatzeko s zuzenaren ekuazio inplizituak lortu behar dira:

$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 3\mu \\ y = 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

μ parametroa lehenengo bi ekuazioetatik askatuz eta gai biak berdinduz

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow 2x - 6 = 3y$$

Hortaz, s zuzena ondorengo eran adieraz daiteke $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$.

Ondorioz, s zuzenaren eta XOY planoaren arteko ebakidura hurrengo sistema ebatziz lortzen da

$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ z = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Aurreko sistema bateraezina da, hortaz, zuzenak eta planoak ez dute elkar ebakitzen $\Rightarrow$ Zuzena eta planoa paraleloak dira.

- s zuzenaren eta XOZ planoaren arteko ebakidura*:*

Era berean, zuzenaren eta planoaren ekuazio inplizituek sortzen duten sistema ebazten da:

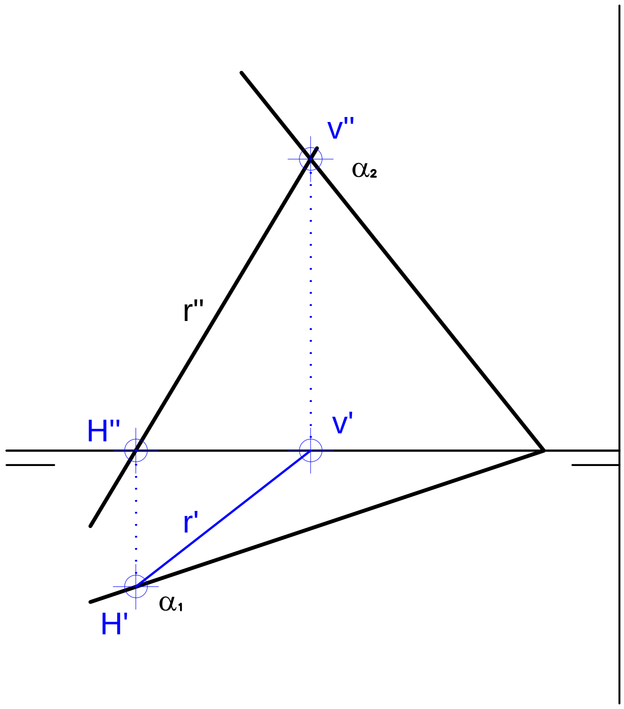
$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ z = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

s zuzenaren eta XOZ planoaren arteko ebakidura $(3,0,2)$ puntua da.

2 ARIKETA

Zehaztu a *eta* b *parametroak,* $(4, a, 4)$ *eta* $(7, b, -1)$ *puntuetatik igarotzen den zuzena* $\alpha: 10x - 30y - 8z = 10$ *planoan egon dadin.*

Aurki ezazu r zuzenaren proiekzio horizontala α planoan egon dadin.



2 ARIKETA

Zehaztu a *eta* b *parametroak,* $(4, a, 4)$ *eta* $(7, b, -1)$ *puntuetatik igarotzen den zuzena* $\alpha: 10x - 30y - 8z = 10$ *planoan egon dadin*

<u>*Ebazpena*</u>

$A(4, a, 4)$ eta $B(7, b, -1)$ puntuetatik igarotzen den zuzena α planoan egongo da, A eta B puntuak α planoan badaude.

$A(4, a, 4)$ puntua planoan egoteko baldintza planteatzen da:

$$10 \cdot 4 - 30a - 8 \cdot 4 = 10 \Rightarrow -30a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{15}$$

$B(7, b, -1)$ puntua planoan egoteko baldintza planteatzen da:

$$10 \cdot 7 - 30b + 8 = 10 \Rightarrow -30b = -68 \Rightarrow b = \frac{34}{15}$$

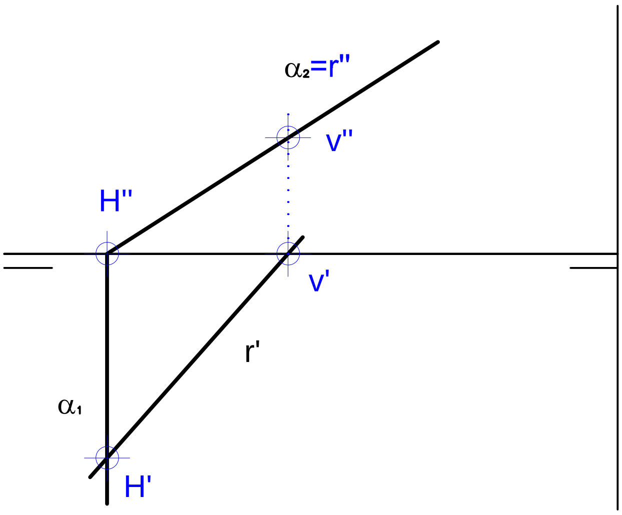
$A(4, a, 4)$ eta $B(7, b, -1)$ puntuetatik igarotzen den zuzena α planoan egongo da $a = -\frac{1}{15}$ eta $b = \frac{34}{15}$ betetzen direnean.

3 ARIKETA

Zehaztu a *eta* b *parametroak,* $r: \begin{cases} 3x - 3y - 12 = 0 \\ y(b - a) - 3z + 3a = 0 \end{cases}$ *zuzena*

$P = (6{,}0{,}0)$, $Q = (2{,}0{,}2)$ *eta* $R = (6{,}3{,}0)$ *puntuak barne dituen planoan egon dadin.*

Aurki ezazu r zuzenaren proiekzio bertikala α planoan egon dadin.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

3 ARIKETA

Zehaztu a eta b parametroak, $r\colon \begin{cases} 3x-3y-12=0 \\ y(b-a)-3z+3a=0 \end{cases}$ *zuzen* $P=(6,0,0)$, $Q=(2,0,2)$ *eta* $R=(6,3,0)$ *puntuak barne dituen planoan egon dadin.*

__Ebazpena__

P,Q eta R puntuak barne dituen π planoa kalkulatzen da. Plano hau lortzeko bertan dauden bi bektore behar dira, $\overrightarrow{PQ}=(-4,0,2)$ eta $\overrightarrow{PR}=(0,3,0)$ adibidez, eta bektore hauek abiapuntu bezala harturik planoaren ekuazioa lortzen da:

$$\begin{vmatrix} x-6 & -4 & 0 \\ y & 0 & 3 \\ z & 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (x-6)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow -6(x-6)-12z=0$$

$$\pi\colon x+2z-6=0$$

$r\cap\pi\colon \begin{cases} 3x-3y-12=0 \\ y(b-a)-3z+3a=0 \\ x+2z-6=0 \end{cases}$ ekuazio linealetako sistema kontsideratzen da, non M koefiziente matrizea eta M' matrize hedatua hurrengoak diren:

$$(M|M')=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & b-a & -3 & 3a \\ 1 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right)$$

r zuzena π planoan egoteko $h(M)=h(M')=2<\text{ezezagun kopurua}=3$ bete behar da.

M matrizearen heina gutxienez 2 da, izan ere $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=3\neq 0$. $h(M)=h(M')=2$ betetzeko ondoren agertzen diren 3 ordenako minoreak nuluak izan behar dira:

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & b-a & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2b-2a+3=0 \quad \text{eta} \quad \begin{vmatrix} 3 & -3 & -12 \\ 0 & b-a & 3a \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2b+a=0$$

Bi ekuazioekin $\begin{cases} 2b-2a+3=0 \\ 2b+a=0 \end{cases}$ sistema sortzen da, sistema honen soluzioa $a=1$ eta $b=-\frac{1}{2}$ izanik.

Balio hauek abiapuntu bezala harturik r zuzenaren ekuazioa kalkula daiteke

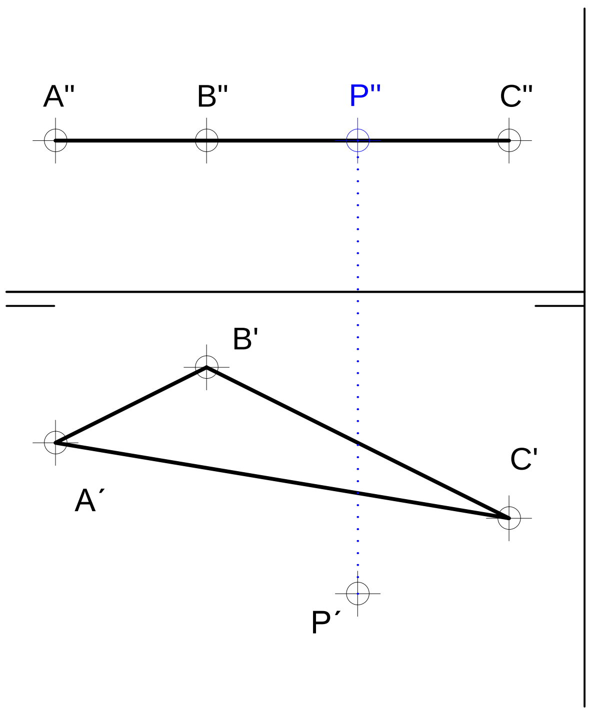
$$r: \begin{cases} 3x - 3y - 12 = 0 \\ -\dfrac{3}{2}y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 4 \\ y + 6z = 6 \end{cases}$$

4 ARIKETA

Zehaztu z koordenatua $P=(3,4,z)$ puntua $\alpha\colon \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 3\\ 2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} 6\\ -1\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$

planoan egon dadin.

Aurki ezazu P puntuaren proiekzio bertikala ABC planoan egon dadin.



4 ARIKETA

Zehaztu z koordenatua $P=(3,4,z)$ puntua α: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

planoan egon dadin.

Ebazpena:

$P=(3,4,z)$ puntua α planoan egoteko, P puntuak planoaren ekuazioak bete behar ditu, hau da, ondorengo sistema bateragarria izan behar da:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 1 + 6\lambda + 2\mu \\ 4 = 3 - \lambda + \mu \\ \mathrm{z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 3\lambda + \mu \\ 1 = -\lambda + \mu \\ \mathrm{z} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \\ \mathrm{z} = 2 \end{cases}$$

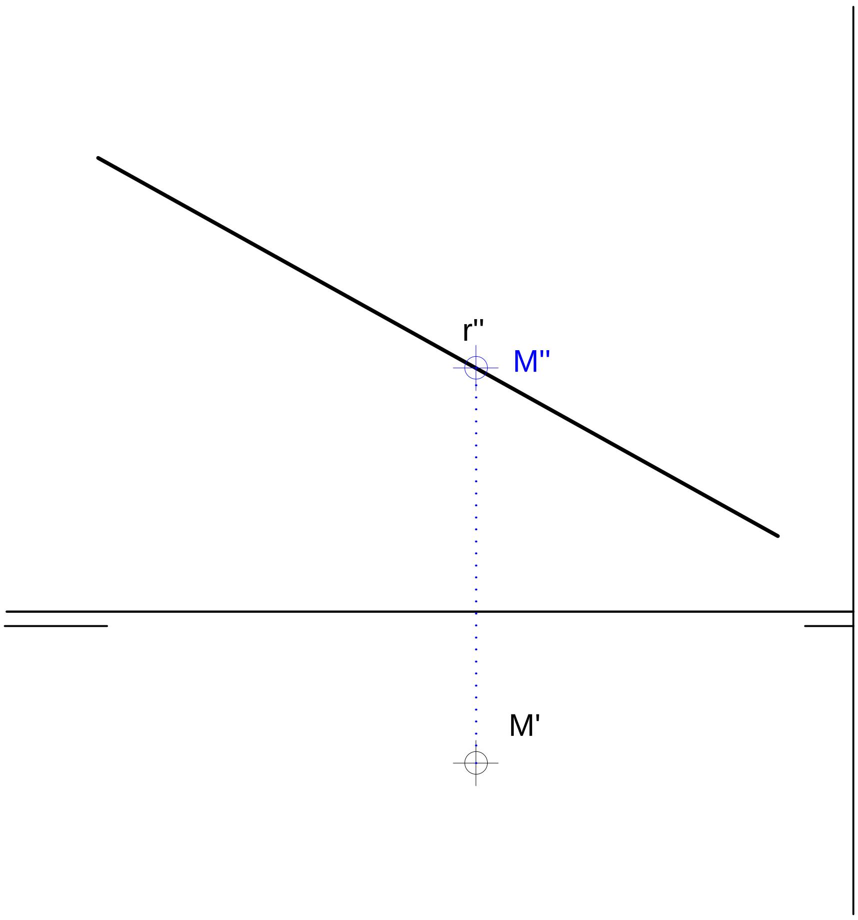
Koordenatua $z=2$ da, hau da, α planoan egongo den P puntua $(3,4,2)$ da.

5 ARIKETA

Zehaztu a *eta* b *parametroak,* $Q = (10, a, 6)$ *eta* $R = (1, b, 1)$ *puntuetatik igarotzen den* r *zuzena* XOZ *planoarekiko paralelo izan dadin.*

1. *Kalkulatu* z *koordenatua* $M = (5,2,z)$ *puntua* r *zuzenean egon dadin.*
2. *Kalkulatu* x *eta* y *koordenatuak* $P = (x, y, 5)$ *puntua* r *zuzenean egon dadin.*

Aurki ezazu M puntuaren proiekzio bertikala r zuzenean egon dadin. Marraz ezazu r zuzenaren proiekzio horizontala plano bertikalarekiko paraleloa izan dadin. Zehaz itzazu 5 kotadun P puntuaren proiekzioak r zuzenan egon dadin.



5 ARIKETA

Zehaztu a eta b parametroak, $Q=(10,a,6)$ eta $R=(1,b,1)$ puntuetatik igarotzen den r zuzena XOZ planoarekiko paralelo izan dadin.

1. Kalkulatu z koordenatua $M=(5,2,z)$ puntua r zuzenean egon dadin.

2. Kalkulatu x eta y koordenatuak $P=(x,y,5)$ puntua r zuzenean egon dadin.

<u>Ebazpena</u>

r zuzenaren norabide bektorea kalkulatzen da: $\vec{v}_r=\overrightarrow{QR}=R-Q=(-9,b-a,-5)$. r zuzena OXZ planoarekiko paraleloa izateko $\vec{v}_r$ bektorea eta OXZ planoko bektore normala elkarzutak izan behar dira. Hau da, bi bektoreen arteko biderkadura eskalarra 0 izan behar da:

$$\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \Rightarrow \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

$\vec{n}_\pi=(0,1,0)$ denez, biderkadura eskalarra ondorengoa da:

$$\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{r} \cdot \vec{\mathrm{n}}_\pi = 0 \Rightarrow = (-9,\mathrm{b}-\mathrm{a},-5)\cdot(0,1,0) = \mathrm{b}-\mathrm{a} = 0 \Rightarrow \mathrm{a}=\mathrm{b}$$

Ondorioz, r zuzenaren ekuazioa parametrikoak ondokoak dira:

$$r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

1.- $M=(5,2,z)$ puntua r zuzenean egoteko, $\lambda \in \mathbb{R}$ existitu behar da zeinetarako M puntuak zuzenaren ekuazioak betetzen dituen. Osagaien berdintzak planteatuz:

$$M \in r, \text{ betetzen bada, orduan } \exists \lambda \in \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 1-9\lambda \\ 2 = b \\ z = 1-5\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$b=2, \lambda = -\frac{4}{9}$$

Lortutako balioak M puntuan ordezkatuz, $M=(5,2,\frac{29}{9})$ lortzen da.

2.- Era berean, $P=(x,y,5)$ puntua r zuzenean egoteko, $\lambda \in \mathbb{R}$ existitu behar da zeinetarako P puntuak zuzenaren ekuazio parametrikoak betetzen dituen. Osagaien berdintzak planteatuz:

$$P \in r, \text{ betetzen bada, orduan } \exists \lambda \in \mathbb{R}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-9\lambda \\ y = b \\ 5 = 1-5\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

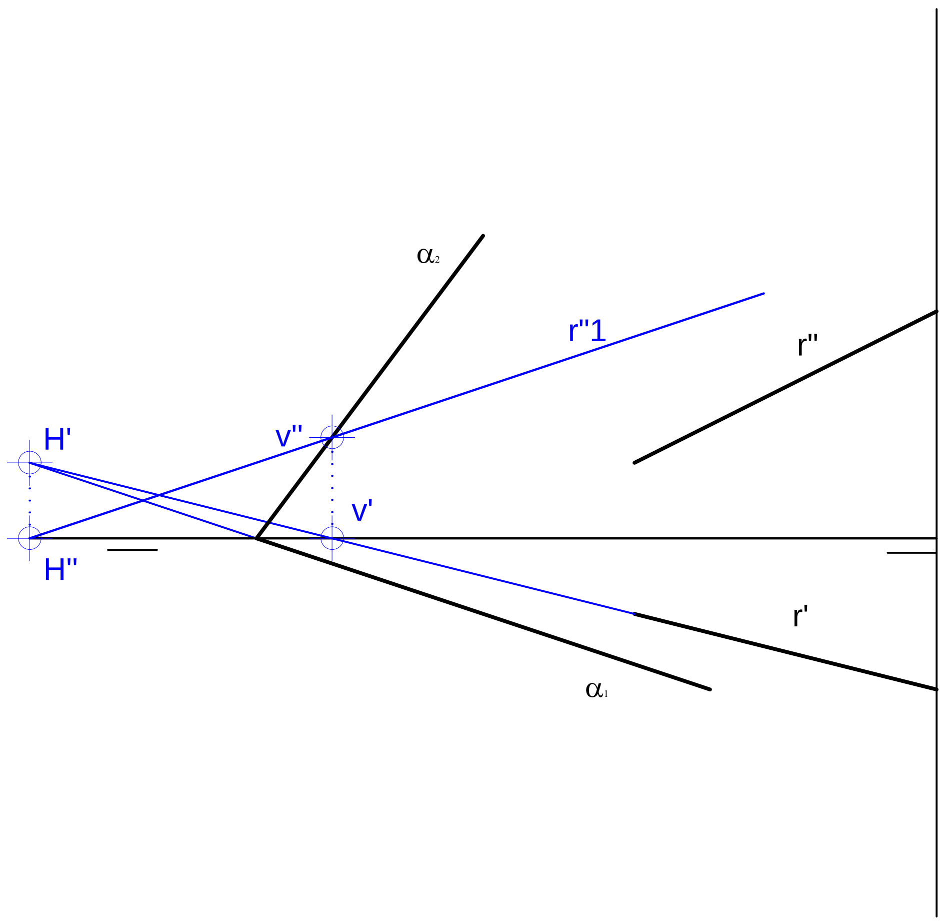
$$\lambda = -\frac{4}{5}$$

$\lambda = -\frac{4}{5}$ P puntuan ordezkatuz, $P = (\frac{41}{5}, b, 5)$ $\forall b \in \mathbb{R}$ puntua r zuzenean dagoela lortzen da.

6 ARIKETA

Zehaztu $r\colon \frac{x}{-4} = y - 2 = \frac{z-3}{2}$ *zuzenaren eta* α *planoaren posizio erlatiboa.*
$P = (3,2,0)$ *puntua* α planoan dagoela eta α planoaren *bektore normala* $\vec{n} = (4,12,3)$ dela jakinik.

Zehaz ezazu r zuzenaren eta α planoaren arteko posizio erlatiboa.



r zuzena ez dago planoan eta eta ez da berarekiko paraleloa, beraz, elkar ebakitzen dute.

Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

6 ARIKETA

Zehaztu r: $\frac{x}{-4}=y-2=\frac{z-3}{2}$ *zuzenaren eta* α *planoaren posizio erlatiboa.* $P=(3,2,0)$ *puntua* α *planoan dagoela eta* α *planoaren bektore normala* $\vec{n}=(4,12,3)$ *dela jakinik.*

Ebazpena

r zuzenaren ekuazio jarraituak abiapuntu bezala harturik, bere ekuazio inplizituak kalkulatzen dira:

$$r:\begin{cases}\dfrac{x}{-4}=y-2\\ \dfrac{x}{-4}=\dfrac{z-3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+4y-8=0\\ x+2z-6=0\end{cases}$$

P puntua eta $\vec{n}$ bektore elkartua erabiliz planoaren ekuazio inplizitua lortzen da:

$$\alpha: 4(x-3)+12(y-2)+3(z-0)=0\Rightarrow 4x+12y+3z-36=0$$

r zuzenaren eta α planoaren posizio erlatiboa aztertzeko $r\cap\alpha$ sistema sortzen da:

$$\begin{cases}x+4y-8=0\\ x+2z-6=0\\ 4x+12y+3z-36=0\end{cases}$$

non M koefizienteen matrizea eta M' matrize hedatua ondorengoak diren:

$$(M|M')=\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&0&8\\1&0&2&6\\4&12&3&36\end{array}\right)$$

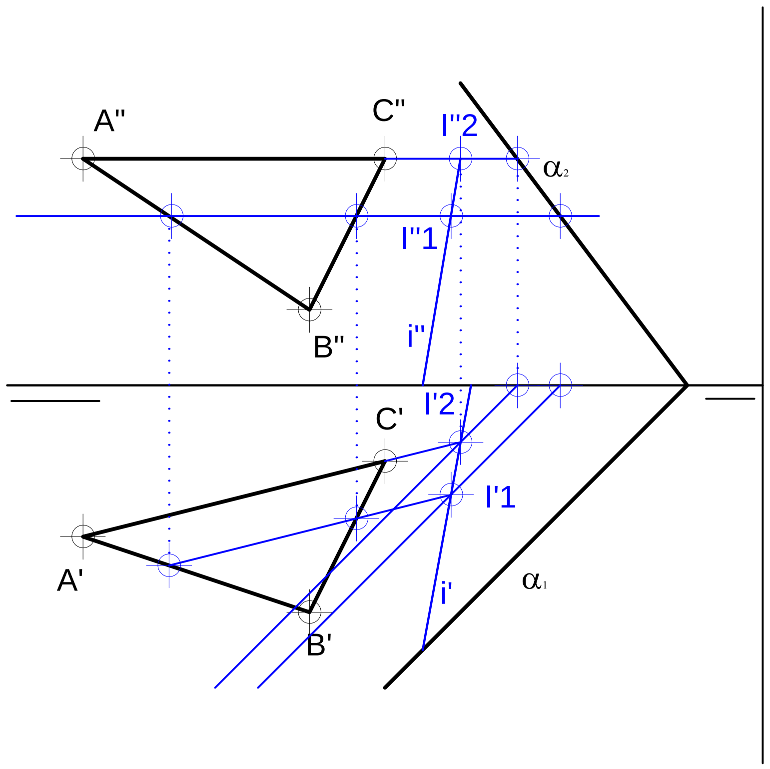
$\begin{vmatrix}1&4&0\\1&0&2\\4&12&3\end{vmatrix}=-4\neq0$ denez, orduan $h(M)=3=h(M')=$ ezezagun kopurua $\Rightarrow$ $r\cap\alpha$ sistema bateragarri zehaztua da, hortaz, zuzenak eta planoak puntu bakar batean elkar ebakitzen dute.

$r\cap\alpha$ sistema ebatziz $I=(-6,7/2,6)$ ebakidura-puntua lortzen da.

7 ARIKETA

Kalkulatu $A = (9{,}2{,}3)$, $B = (6{,}3{,}1)$ *eta* $C = (5{,}1{,}3)$ *puntuak barne dituen* β planoaren eta α: $4x - 4y - 3z = 4$ planoaren ebakidura.

Aurki ezazu ABC planoaren eta α planoaren arteko elkargunea.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

7 ARIKETA

Kalkulatu $A=(9,2,3)$, $B=(6,3,1)$ *eta* $C=(5,1,3)$ *puntuak barne dituen* β *planoaren eta* $\alpha: 4x-4y-3z=4$ *planoaren ebakidura.*

<u>*Ebazpena:*</u>

Planoan dagoen $\mathrm{A}=(9,2,3)$ puntua eta $\vec{\mathrm{n}}=(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_3)$ bektore normala erabiliz, planoaren ekuazioa lortzen da.

Horretarako, planoaren $\vec{u}=B-A=(-3,1,-2)$ eta $\vec{v}=C-B=(-1,-2,2)$ norabide bektoreak kalkulatzen dira, eta bi norabide bektoreen biderkadura bektoriala erabiliz planoaren bektore normala lortzen da:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=-2\vec{\imath}+8\vec{\jmath}+7\vec{k}$$

Ondorioz, β planoaren ekuazioa ondorengoa da:

$$-2(x-9)+8(y-2)+7(z-3)=0 \Rightarrow$$

$$\beta:\ -2x+8y+7z-19=0$$

Eskatutako ebakidura lortzeko α eta β planoen ekuazioek sortzen duten sistema ebatziko da:

$\begin{cases} -2x+8y+7z=19 \\ 4x-4y-3z=4 \end{cases}$, non M koefizienteen matrizea eta M' matrize hedatua ondorengoak diren

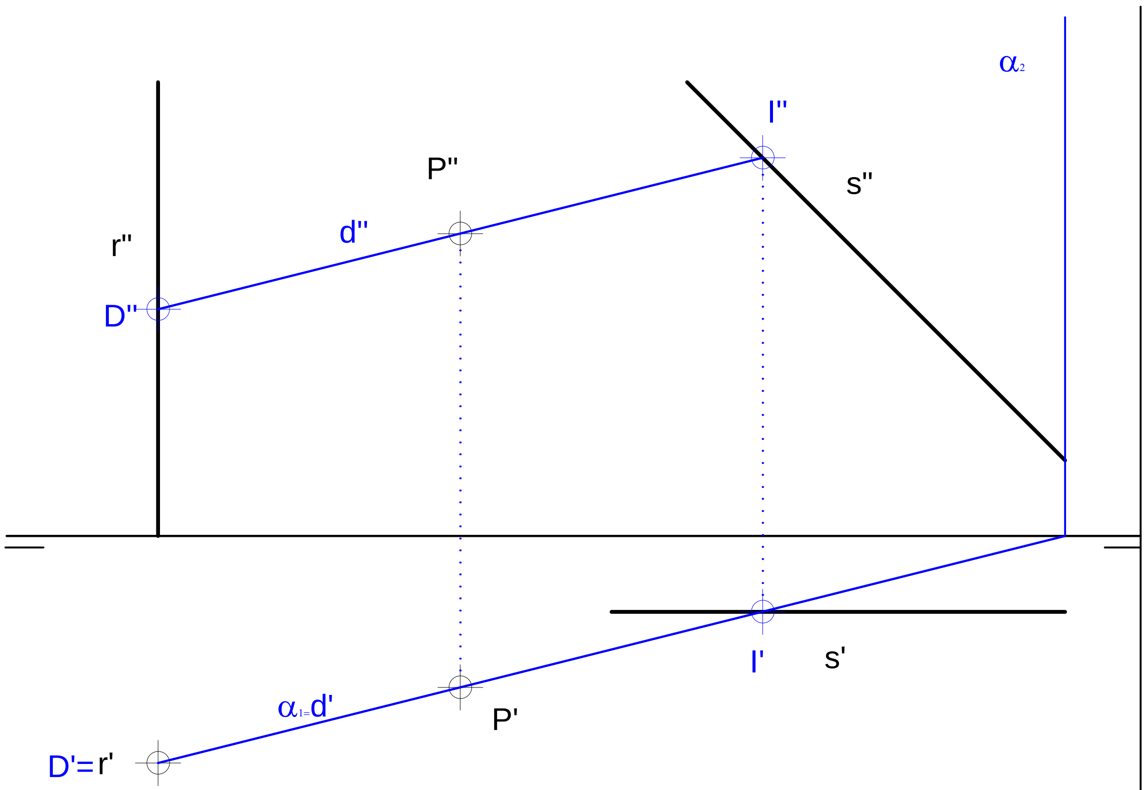
$$(M|M')=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 8 & 7 & 19 \\ 4 & -4 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

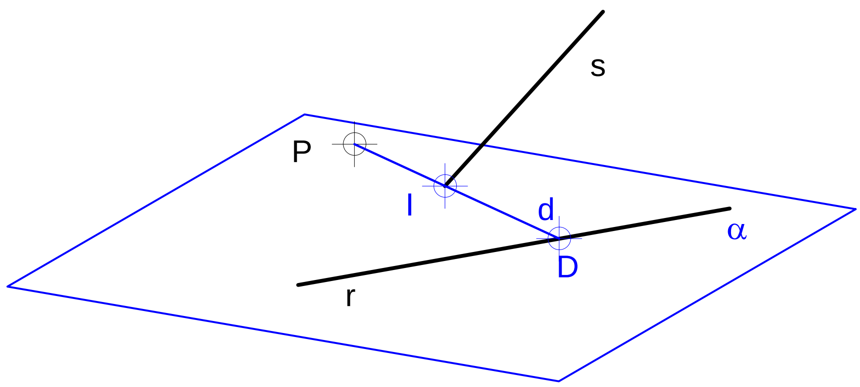
M matrizearen heina bi da, izan ere $\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow h(M)=h\left(M'\right)=2<3=$ $ezezagun\ kopurua \Rightarrow$ Sistema bateragarri zehaztugabea da, ebakidura ondoko ekuazio inplizitua duen zuzena izanik $\begin{cases} -2x+8y+7z-19=0 \\ 4x-4y-3z-4=0 \end{cases}$.

8 ARIKETA

Izan bitez r $(13,3,3)$ eta $(13,3,0)$ puntuak barne dituen zuzena eta s $(6,1,6)$ eta $(1,1,1)$ puntuak barne dituena. Zehaztu $P=(9,2,4)$ puntutik igarotzen diren eta r eta s zuzenak ebakitzen dituzten zuzenak.

Marraz itzazu P bere baitan duten eta r eta s zuzenak mozten dituzten zuzenak.





Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

8 ARIKETA

Izan bitez r $(13,3,3)$ *eta* $(13,3,0)$ *puntuak barne dituen zuzena eta* $s\,(6,1,6)$ *eta* $(1,1,1)$ *puntuak barne dituena. Zehaztu* $P=(9,2,4)$ *puntutik igarotzen diren eta* r *eta* s *zuzenak ebakitzen dituzten zuzenak.*

Ebazpena:

$P(9,2,4)$ puntutik igaro eta r zuzena barne duen π planoa kalkulatzen da. Horretarako paraleloak ez diren bi bektore behar dira. Adibidez, ondorengo bektoreak kontsideratzen dira:

- r zuzenaren norabide bektorea: $\vec{v}_r=(13,3,3)-(13,3,0)=(0,0,3)$.
- $\vec{v}_{p1}=(13,3,3)-(9,2,4)=(4,1,-1)$ bektorea.

π planoa ondorengoa da:

$$\pi:\begin{cases} x=9+4\mu \\ y=2+\mu \\ z=4+3\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-9 & 0 & 4 \\ y-2 & 0 & 1 \\ z-4 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi: -3x+12y+3=0$$

Era berean, $P(9,2,4)$ puntutik igaro eta s zuzena barne duen π' planoa kalkulatzen da. Horretarako, paraleloak ez diren bi bektore behar dira. Adibidez, hurrengo bektoreak kontsideratzen dira:

- s zuzenaren norabide bektorea: $\vec{v}_s=(6,1,6)-(1,1,1)=(5,0,5)$.
- $\vec{v}_{p2}=(6,1,6)-(9,2,4)=(-3,-1,2)$ bektorea.

π' planoa hurrengoa da:

$$\pi':\begin{cases} x=9+5\lambda-3\mu \\ y=2-\mu \\ z=4+5\lambda+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-9 & 5 & -3 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z-4 & 5 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \pi': x-5y-z+5=0$$

P puntutik igarotzen diren eta r eta s zuzenak ebakitzen dituzten zuzenak, π eta π' planoen arteko ebakidura ($\pi\cap\pi'$) dira:

$$\begin{cases} -3x+12y+3=0 \\ x-5y-z+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x+12y=-3 \\ x-5y=z-5 \end{cases}$$

Sistema bateragarri zehaztugabea da: $A=\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=3$

Eta sistemaren soluzio ondorengo zuzena da:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 12\\ z-5 & -5\end{vmatrix}}{3}=25-4z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 1 & z-5\end{vmatrix}}{3}=-z+6$$

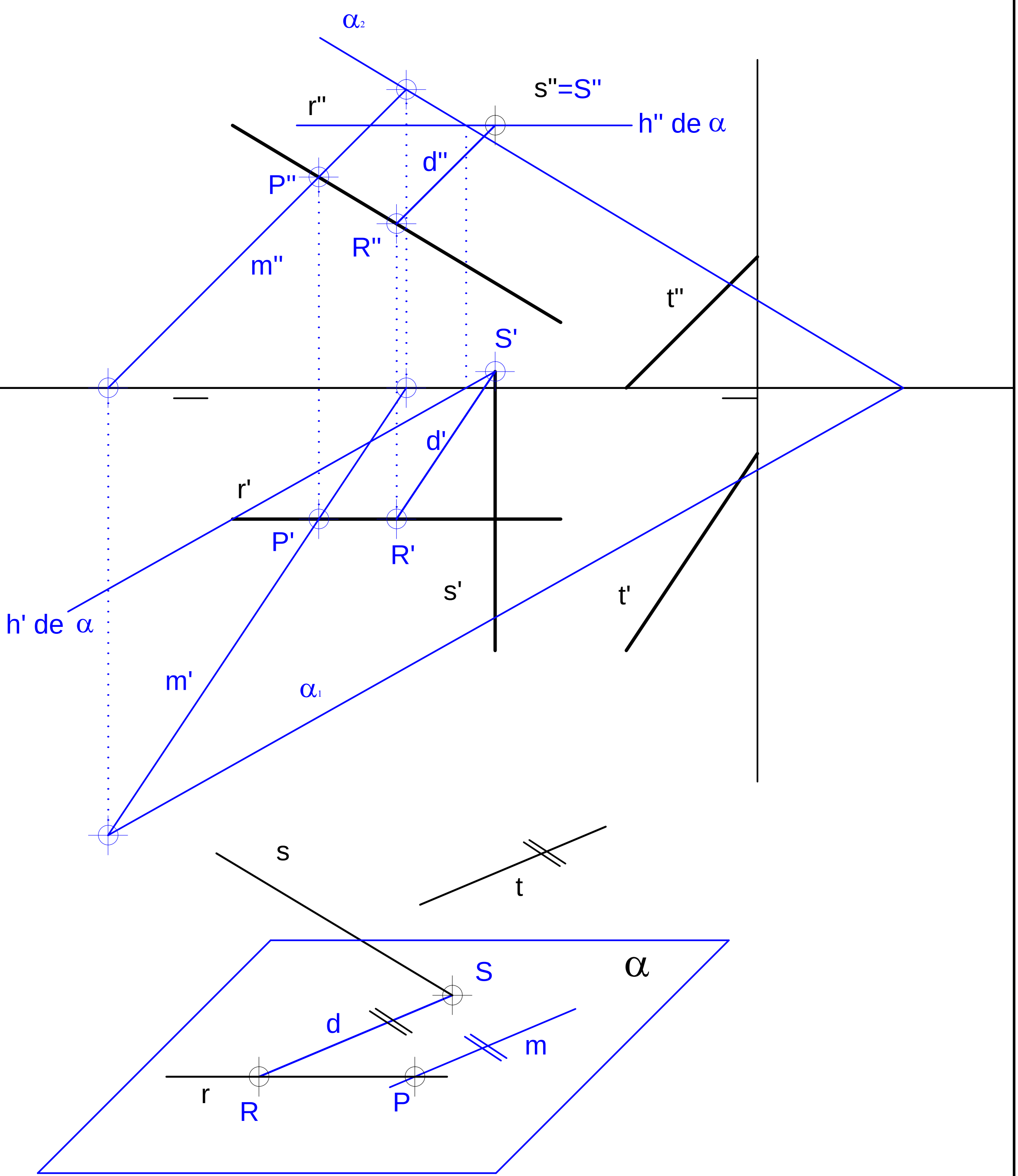
$$r:\begin{cases}x=25-4z\\ y=-z+6\\ z=z\end{cases}$$

9 ARIKETA

Zehaztu r: $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ *zuzena eta* s: $\begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ *zuzena ebakitzen dituzten eta*

t: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$ zuzenarekiko paraleloak diren zuzenak.

Marraz itzazu r eta s zuzenak mozten dituen eta t zuzenarekiko paraleloak diren zuzenak.



Elisabete Alberdi Celaya, Irantzu Álvarez González, Mª Isabel Eguia Ribero, Mª José García López eta Aitziber Unzueta Inchaurbe

9 ARIKETA

Zehaztu $r: \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ *zuzena eta* $s: \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$ *zuzena ebakitzen dituzten eta* $t: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$ *zuzenarekiko paraleloak diren zuzenak.*

Ebazpena:

Eskatutako zuzenak t zuzenarekiko paraleloak badira, berain norabide bektoreak t zuzenaren $\overrightarrow{v_t} = (2,3,-2)$ norabide bektorearekiko paraleloak izan behar dira. Hortaz, eskatutako zuzenen norabide bektorea $(2,3,-2)$ da.

Bestalde, r zuzenaren ekuazio inplizituak parametrikoak bilakatuz, r zuzenean dagoen puntu orokor bat lortzen da:

$r: \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \left(\frac{14}{3}, 2, \lambda\right)$ r zuzeneko puntu orokor bat da.

s zuzenaren kasuan gauza bera eginez:

$s: \begin{cases} x = 4 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow B = (4, \mu, 4)$ s zuzeneko puntu orokor bat da.

Eskatutako zuzenak r eta s zuzenak ebakitzeko, r zuzeneko puntu batetik eta s zuzeneko beste puntu batetik igaro behar da. Arrazoi honengatik, A eta B puntuetatik igarotzen diren zuzenak kalkulatzen dira:

$$\frac{x-4}{4-14/3} = \frac{y-\mu}{\mu-2} = \frac{z-4}{4-\lambda} \Rightarrow \frac{x-4}{-2/3} = \frac{y-\mu}{\mu-2} = \frac{z-4}{4-\lambda}$$

Zuzen honen norabide bektorea $\left(-\frac{2}{3}, \mu - 2, 4 - \lambda\right)$ da, $(2,3,-2)$ bektorearekiko paraleloa izan behar dena. Bi bektoreak paraleloak izateko ondorengoa bete behar da:

$$\frac{-2/3}{2} = \frac{\mu-2}{3} = \frac{4-\lambda}{-2} \Rightarrow \lambda = \frac{10}{3} \text{ eta } \mu = 1$$

Balio hauek eskatutako zuzenaren ekuazioan ordezkatuz hurrengoa lortzen da

$$\frac{x-4}{-2/3} = \frac{y-1}{1-2} = \frac{z-4}{4-\frac{10}{3}} \Rightarrow \frac{x-4}{-2/3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{2/3} = \delta$$

Edo, gauza bera dena, soluzioa den zuzenaren ekuazio parametrikoak ondorengoak dira:

$$\begin{cases} x = 4 - \dfrac{2}{3}\delta \\ y = 1 - \delta \\ z = 4 + \dfrac{2}{3}\delta \end{cases}$$