ALGORITMOEN DISEINUA

G6: ALGORITMO JALEAK

1) Kardinalitate handien duen eta elkar bateragarri diren ekintzen multzoa ekoizteko edozein hautaketa jalea ez da ona. Honela, gutxien irauten duen eta dagoeneko onartuak izan diren ekintzekin bateragarria den ekintza hautatzea eta onartzea hautaketa jalea ona ez dela frogatzeko adibide bat ematea eskatzen da. Gelditzen diren (eta dagoeneko onartuak izan diren haiekin bateragarriak diren) ekintzen artetik ekintza gutxienekin teilakatzen den ekintza hautatzea eta onartzea ere hurbilpen okerra dela adibide batez baiezta bedi.

2) *Motxilaren problema zatiekin.* Aldaera honetan motxilan objektuak osorik nahiz hauen zatiren bat sartzea onartzen da. Demagun motxilak 10 edukiera duela eta sargarriak diren objektuen pisuak (2,3,4,3,5) eta euren balioak (1,4,3,1,3) direla hurrenez hurren. Motxilan eraman litekeen irabazi maximoa zein da?

3) Alpedrete zinema aretoan hainbat pelikula proiektatu nahi dira. Emanaldi bakoitzaren hasiera ordua eta amaiera ordua ezaguna izanik, hauexek dira jaso diren emaldi eskaerak: [1,2), [3,6), [4,5), [7,10), [9,11), [11,20), [12,16), eta [15,17). Eskolan ikusitako hautaketa prozedura erabiliz, proiektatuko liratekeen pelikulak zehazta ditzazun eskatzen zaizu.

4) G=(V,E) grafo ez-zuzendu pisudun baten auzokidetza matrizea ematen zaizu:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
A	∞	2	∞	∞	∞	7	3	∞	∞
B	2	∞	4	∞	∞	∞	6	∞	∞
C	∞	4	∞	3	∞	∞	∞	2	∞
D	∞	∞	3	∞	1	∞	∞	8	∞
E	∞	∞	∞	1	∞	2	∞	∞	2
F	7	∞	∞	∞	2	∞	∞	∞	5
G	3	6	∞	∞	∞	∞	∞	3	1
H	∞	∞	2	8	∞	∞	3	∞	4
I	∞	∞	∞	∞	2	5	1	4	∞

Adierazpide honi dagokion grafoa marraztu. *Prim*-en algoritmoak grafo honentzat kalkulatuko lukeen *hedapen zuhaitz minimoa* kalkula ezazu; zehazki, iterazio bakoitzean Primek onartu dituen ertzak idatziz.

5) "*Pisu handien duen ertza kentzea*" prozedura hauteslearen baliagarritasuna aztertu grafoaren hedapen zuhaitz minimoa kalkulatzeko grafo konexu, ez-zuzendu eta pisu positibodunentzat. Lortutako algoritmoa eta *Prim*-ena aldera itzazu.

6) Pirata informatikari talde batek ez-legezko n kopia lortu ditu $P_1, P_2,...,P_n$ programenak eta DVD bat argitaratu nahi du isilpean banatzeko. Programa P_i bakoitzak S_i MByte espazio behar du, eta, zorigaitzez, DVD-aren kapazitatea K izanik, hau ez da nahikoa programa denak metatzeko, $K < \sum_{i=1}^{n} S_i$ gertatzen baita:

   a) Demagun piratek diskoan metatutako programa kopurua maximizatu nahi dutela (produktu gehiago edukitzeak erakargarriagoa egingo duelakoan). "*S_i balioen ordena gorakorrean programak aukeratzen joatea*" hautaketa jale ona da? Hala balitz, algoritmo jalea egizu, bestela kontrako-adibidea eman.

   b) Demagun orain nahiago dutela diskoko edukiera gehien kontsumitzea (beste DVD batzuk grabatuko baitituzte eta horrela bolumen gutxiago geldituko zaielako grabatzeko). "*S_i balioen ordena beherakorrean programak aukeratzen joatea*" hautaketa jale ona da? Hala balitz, algoritmo jalea egizu, bestela kontrako-adibidea eman.

7) Eski irakasle batek *n* eski pare banatu behar ditu bere *n* ikasle berrien artean. Horretarako "*pertsona bati esleitu behar zaion eski parea, honen luzera pertsonaren altueratik hurbilen gelditzen den eski parea*" irizpidea erabili nahi du irakasleak. Pertsonen altueren eta eski luzeren diferentzien balio absolutuen batura minimizatzen duen eski banaketa nola egin behar du irakasleak?

8) Unibertsitateko udarako ikastaroekin batera hainbat hitzaldi antolatu nahi dira. Hamaika hitzaldi dira, eta bakoitzaren hasiera ordua eta amaiera ordua finkatuta dago. Udarako ikastaroen zuzendaritzak hitzaldietarako soilik erabiliak izango diren gela batzuk erreserbatzea erabaki du. Erreserbatu behar diren gutxieneko gela kopurua kalkulatuko duen algoritmo bat egizu eta haren denbora ordena aztertu.

9) Zehazki pisu berdina duten bi ertz dituen grafo bat emanik:

   a) Bi horietako lehenen hautatutako ertza edozein izanik, *Prim* algoritmoak hedapen zuhaitz minimo bera eraikiko luke?

   b) Aurreko atalekoa baina *Kruskal* algoritmoa erabiliz.

10) Demagun *Bib(G,v)* algoritmoa dugula, non G ertz positiboak dituen grafo bat eta bertako v erpin bat emanik v-tik G-ko gainontzeko erpinetaraino dauden distantzia minimoak itzultzen dituen. Egia da *Bib(G,v)=Bib(Kruskal(G),v)*? Gogoratu Kruskal(G) G-ko hedapen zuhaitz minimo bat dela.

11) G grafo ez-zuzendua emanik *Kruskal*-en algoritmoak *G*-ren hedapen zuhaitz minimoa kalkulatzen du *Bilatu−Bateratu* (*Union-Find*) datu-egitura erabiliz. Metodoak lehendabizi grafoaren ertzez osatutako multzoa haien pisu gorakorrean ordenatzen du, ondoren ertz bakoitza banan bana aztertzeko. Kruskalen ondorengo bariante berria aztertzea eskatzen da. Aldaera berriak meta (*Heap*) datu-egitura erabiliko du ertzak metatzeko, eta bertatik banan bana hartuko ditu ondoren iturri bertsioan bezala tratatzeko. Algoritmoa idaztea eta haren ordena kasu txarrenean kalkulatzea eskatzen da. Erantzun biak justifikatzea derrigorrezkoa da.

12) G grafo konexuko ertzetako zein *T* azpimultzok *G*-ko erpin guztiak konektatzen dituen eta ertz haien pisuen batura minimoa ematen duen kalkulatzen badakigu. *T* multzoaren kalkuluak zentzua izaten jarraitzen du oraindik nahiz *G*-ko zenbait ertzek pisu negatiboa eduki. Hala ere, kasu honetan soluzioak ez du zergatik zuhaitza izan behar. Kruskalen algoritmoa egoki bedi pisu negatibodun ertzak dituzten grafoekin ere algoritmoak funtziona dezan.

13) Erpin batetik besteetaraino dauden distantzien arteko distantzia luzeena kalkulatzeko ondorengo ideia pentsatu da: Izan bedi *Z* oso handia den zenbaki bat eta erpin auzokideen arteko distantzia berria $DBerria(u,v)=Z-D(u,v)$ formula bidez birkalkulatzen da (non u eta v edozein erpin auzokide diren). Distantzia berriak definitu ondoren, *Dijkstra*-ren algoritmoa grafo berriari aplikatuz, honek itzulitako bide motzenen distantzia, jatorrizko grafoan bide luzeenen distantziak dira. Baina, estrategia honen hanka sartzea non dago? Zergatik ez da zuzena?

14) Metropolis hiriko Trafiko Sailak zenbait kaleetan zehar konponketa lanak egitea erabaki du. Baina lan hauek aurrera emateko trafikoa etetea beharrezkoa da konponketak egiten ari diren kaleetan zehar. Trafikoa eten daitekeen kaleen zerrenda maximoa ematea eskatzen da, bidagurutze guztiak atxikigarriak izan behar dutela jakinik eta trafiko edukiera ahalik eta handien mantenduz.

15) *Dijkstra*-ren algoritmoa (grafo zuzendu bat emanik, erpin batetik beste erpinetaraino doazen bide motzenen kostua kalkulatzen duena) ikusi ondoren, hura aldaraztea eskatzen da gainera ondorengoak kalkula eta itzuli ditzan exekuzio denboraren ordena mantenduz:

a) Zenbat bide minimo dauden erpin bakoitzeraino.

b) Bide minimoak (hots, bideak) zeintzuk diren.

Erantzunak arrazoi itzazu

Arrastoa: *Dijkstra*-ren benetako algoritmoak bide motzenen kostua kalkulatzeaz at, gain- era bide propioak kalkula ditzan (erpinen sekuentziak) aski da bide horiek metatuko dituen *BMD(1..n)* taula eranstea. *BMD(x)* gelaxkak 1etik X-rainoko bideetan justu X erpinaren aurretik bisitatu behar diren erpinen zerrenda metatuko du. Adibidez, BM D(x) = [x_1, x_2, x_3] bada, 1etetik X-rainoko motzenetan (x_1,x), (x_2,x) eta (x_3,x) bisitatzen diren arkuak dira.

16) Demagun grafo zuzendu azikliko bat dugula, non haren arku bakoitzak pisu ez-negatibo bat erlazionaturik duen. Helburua, abiapuntu batetik beste erpinetaraino doazen bideen arteko bide luzeenen distantziak zenbatekoa den kalkulatzea da. Zuzena litzateke ondorengo hautaketa jalea erabiltzea algoritmo jale batez problema ebazteko?

Izan bedi S onartutako erpinen multzoa (hasieran S={Abiapuntua}). Pauso bakoitzean bide berezi luzeena duen eta e∉S den erpina onartuko du hautaketa jaleak.

(Bide bereziaren kontzeptua *Dijkstra*-ren algoritmoan ikusitakoa da.)

17) Demagun G grafo azikliko arkuen pisuak 0 edo balio handiagoa dutela. *Dijkstra*-ren algoritmoan, izan bedi *w* soluzio *S* multzotik at dagoen erpin bat *S*-ri *v* erpin berri bat erantsi ondoren. Ba al lezake abiapuntu erpinetik *w*-rainoko bide berezi motzen batek *v*-tik pasa ondoren *S*-ko beste erpin batetik pasatzea? Erantzuna matematikoki argudiatu behar da.

18) Tokiz aldatu nahi dugun *L* litroko depositu bat dugu. Duen bolumenagatik, toki aldaketa hutsik dagoelarik egin behar da. Depositukoo edukiaren garraiorako beste *N* depositu dituen tren bat erabiliko da. Treneko depposituek behar haina edukiera duten arren, txartuta daude eta garraiatzen duten likidoaren zati bat garraioan galtzen dute. Depositu bakoitzak galtzen duen likidoa, daramaten kantitatearen menpe dago. *G(1..N,1..L)* matrize bat dugu, non *G(i,k)* balioak *i* depposituan *k* litro sartuez gero galduko liratekeen litroen estimazioa adierazten duen. *L* litro garraiatzerakoan gutxienez galduko diren litroen estimazioa kalkulatu nahi dugu bai eta depositu bakoitzean eraman behar diren litro kopurua ere. Proposatutako soluzioaren denbora-ordena eta erabilitako memoria espazio estra kalkula ezazu.

19) Huffmanen kodeketa:

• Zuhaitz bitar ez-beteak aurre-kodeketa optimoei ez dakiekeela froga bedi.

• Aurre-kodeketa optimoen zuhaitzen kostu guztia ere barne adabegi bakoitzaren bi haurren maiztasunen konbinazioa eginez kalkula daitekeela froga bedi.

• Demagun 8 bit erabiliz kodetzen diren karaktereez osaturik dauden datuen fitxategi bat dugula. 256 karaktere hauen maiztasunei dagokienez, ezaguna da maiztasun handiena maiztasun txikienaren bikoitza baino txikiagoa dela. Froga bedi Huffmanen kodeketa erabiltzea 8 biten luzera finkoko kodeketa arrunta baina eraginkorragoa ez dela.

20) Eskiko irakaslea batek n pare eski bere ikasle berrien artean banatu behar ditu. Eskiko klubaren erregelak jarraituez gero, ikasle bakoitzak bere altuerarekin bat datorren eski parea jaso beharko luke. Irakaslearen problema *n* eski pareak bere *n* ikasle berrien artean ahalik eta hobekien banatzea da. *Ikasle bakoitzaren altueraren eta honi esleitutako eski parearen luzeraren arteko diferentziaren balio absolutuen batura minimizatzea* da irakaslearentzat asignaziorik onena.

Problema ebazteko nahikoa izango da ikasle baxuenari eski pare motzena esleitzea eta modu berean jarraitzea gainontzeko ikasleekin. Estrategia zuzena dela froga bedi.

21) *Midas* irakaslea bere autoa Irunetik Tarifara ari da gidatzen *X* errepidetik. Bere gasolio depositua beterik dagoela habiatzen bada, Midas-ek *n Km* gida ditzake. Bestalde bere errepide mapa eguneratuan zerbitzuguneak markaturik datoz, gainera bere bideko zerbitzuguneen arteko distantzia kilometrotan azaltzen du. Irakasleak ahalik eta geldiune kopuru txikiena egin nahi duela eta, Midas irakasleak zein zerbitzugunetan gelditu beharko lukeen adieraziko duen algoritmo eraginkor bat idaztea eskatzen da. Erabilitako estrategiak beti soluzio onena emango duela froga bedi.

22) ***K*** euro sakelan izanik azokara goaz. Honekin batera eros ditzakegun ***m*** produktuen zerrenda daramagu. ***i*** produktu bakoitzeko ($1 \le i \le n$) p_i prezioa eta e_i erabilgarritasun balioa (biak osoko positiboak) ezagunak ditugu. Produktu bakoitzeko gehienez 3 produktu eros ditzakegu. Gainera, eguneko eskaintzari esker, produktu beraren bigarren unitatearen salneurria 1 euro gutxiago kostatuko zaigu eta hirugarren unitatea, aldiz, 2 euro gutxiago. Erosketaren erabilgarritasuna erositako produktu bakoitzaren erabilgarritasunaren batura dela jakinik, *Programazio Dinamikoaren* teknika aplikatuz algoritmo bat idatz ezazu gehienez K euro azokako produktuetan gastatuz lor dezakegun erabilgarritasun maximoa mugatzeko bai eta erosi behar den **elementuen zerrenda** ere. Proposatutako soluzioaren denbora-ordena eta erabilitako memoria espazio estra kalkula ezazu.

23) Izan bedi $M_1, ..., M_n$ *n* matrizez osaturiko sekuentzia, non M_i matrizearen dimentsioak $D_{i-1} \times D_i$ den $\forall i$ $1 \le i \le n$. Ondoren, matrize-sekuentziako matrizeen arteko biderkatzea egiteko estrategia jale bat proposatzen da:

Pauso bakoitzean, gelditzen diren matrizeen dimentsio handiena hartu bedi eta dimentsio hori konpartitzen duten bi matrize auzokideen arteko biderkatzea egin bedi.

Estrategia honek faktoketa-ordena optimoa ematen duela ikus bedi.

a) Algoritmoaren exekuzio-ordena zein da? (Faktorketa egiteko soilik, benetako biderkaketa egin gabe)

b) Edo estrategiak beti faktorketa optimoa kalkulatzen duela froga bedi (hots, seguru eta induktibo propietateak frogatu) edo aurkako adibide bat eman bedi.