ALGORITMOEN DISEINUA

G3: GRAFO GAINEKO ALGORITMOAK:
sakonerako eta zabalerako korritzeak

1) Ondorengo auzokide-zerrendak G grafoa zuzendua adierazten du:

```
E = [E(1), E(2), E(3), E(4), E(5), E(6), E(7)]
E(1) = [2, 3, 6]
E(2) = [3, 4]
E(3) = []
E(4) = [1, 3]
E(5) = [3, 7]
E(6) = [1, 3]
E(7) = [4, 5]
```

Marraz ezazu adierazpide honi dagokion grafoa. G grafoan 1 erpinetik hasiz sakonerako korritzeari dagokion erpinen zerrenda -lehenengo ikustaldi ordenan- idatz ezazu. G grafoan 1 erpinetik hasiz sakonerako korritzeari dagokion arkuen zerrenda - lehenengo ikustaldi ordenan - idatz ezazu. (a erpinetik hasi eta b erpinean amaitzen den arkua adierazteko (a, b) idazkera erabil ezazu.).

Ondoren, kalkulu berdinak egin zabalerako korritzerako.

2) Izan bedi G grafo zuzendua. G auzokidetza matrize bidezko adierazpidea erabiliz emana dator. Idatzi eta aztertu

   a) G-ren sakonerako algoritmoa adierazpide berrirako egokitu eta aztertu.

   b) G-ren berdin, baina zabalerako korritze algoritmorako.

3) Grafoen gaineko sakonerako korritzea idatzi sarrerako grafoa auzokide matrize bidez adierazirik datorren kasurako (grafoaren adierazpidea beste batetara bihurtu gabe). Bere ordena aztertu. Hobea al litzateke auzokideen lista adierazpidera bihurtzea eta orduan adierazpide berrian sakoneran korritzea? Erantzuna argudia ezazu.

4) Grafoen gaineko zabalerako korritzea idatzi sarrerako grafoa auzokideen listen bidez adierazirik datorren kasurako (grafoaren adierazpidea beste batetara bihurtu gabe). Bere ordena aztertu. Hobea al litzateke auzokide matrize adierazpidera bihurtzea eta orduan adierazpide berrian zabaleran korritzea? Erantzuna argudia ezazu.

5) `G=(Erpinak, Arkuak)` grafo zuzenduentzat beste adierazpide berezi bat `|Erpinak|×|Arkuak|` intzidentzia matrize bidezko adierazpidea da. *IM* intzidentzia matrizeko IM_{ij} posizioan ager daitekeen balioa

$$IM_{ij} = \begin{cases} +1 & j\ arkua\ i\ erpinetik\ irtetzen\ da \\ -1 & j\ arkua\ i\ erpinara\ iristen\ da \\ 0 & bestela \end{cases}$$

izan daiteke. Adierazpide konkretu hau duen grafo bat sakoneran korritzen duen algoritmoa idatzi bedi. Algoritmoaren ordena zehatza zein da? Algoritmoak egindako lana aztertuz argudia bedi.

Zabalerako korritzearekin gauza bera egin bedi.

6) Z zuhaitza emanik bertako zein K mailak adabegi gehien dituen kalkulatuko duen algoritmoa idaztea eta bere ordena kalkulatzea eskatzen da. Horietako maila bat baino gehiago existituko balira, maila handiena itzuli beharko luke algoritmoak.

7) Auzokideen listen bidez adierazitako grafo zuzendu bat emanik, zenbat denbora beharko litzateke erpin bakoitzeko d^+, `outdegree`, kalkulatzeko? Eta d^-, `indegree`, kalkulatzeko?

8) Z abalerako edo sakonerako korritzea behar den neurrian aldatu Ordenazio Topologikoaren problema ebatzi dezan. Soluzioaren ordena zein da?

9) *n* erpin eta *a* arku dituen grafo zuzendu azikliko bateko erpinei [1..n] tarteko zenbaki desberdinak esleitzen dien algoritmo bat idaztea eskatzen da, asignazio metodoak ondorengoa izan behar duelarik: $\forall v, w$ grafoko erpinak izanik,

```
baldin v ≠ w eta baldin v-tik w-raino bidea existitzen badu
        orduan Zenbakia(v)<Zenbakia(w)
```

Algoritmoaren ordena zehatza zein da? Erantzun biak argudia bitez.

10) *n* konputagailuz osaturiko sare internazional bateko X konputagailu bakoitza dobloi bat ordainduz bere I konputagailu auzokidearekin komunika daiteke. Aldi berean, I beste batzuekin komunikatuta dagoenez, X beste konputagailuekin komunika daiteke. Noski, komunikatzen den konputagailu bakoitzari dagokion dobloia ordaindu beharko dio.

`Prezioa(1..N)` taula kalkulatuko duen algoritmoa idatz ezazu, non `Prezioa(J)` gelaxkak 1 konputagailua J konputagailuarekin konexioa eduki dezan, lehenengoak ordaindu beharko duen dobloi kopurua jasotzen duen.

11) Matrize bidezko adierazpidea erabiltzen denean grafo gehienek $\Theta(|\texttt{Erpinak}|^2)$ denbora behar dute. Halere, salbuespen batzuk badaude. Bestalde, grafo bateko erpin bat isuri-toki erpina da, baldin eta $d^- = |\texttt{Erpinak}| - 1$ eta $d^+ = 0$ baditu. Froga bedi grafo batek isuri-toki erpinik duen edo ez mugatzeko $O(|\texttt{Erpinak}|)$ denbora behar duen algoritmo batekin aski dela, nahiz grafoa auzokide matrize bidez adierazirik eman.

12) Demagun bidai-agentzia baten datu-basean munduko aireportu guztien arteko hegaldiei buruzko informazioa gordetzen dela. Aire-lotura guztiak joan eta etortzekoak direla suposatuko dugu. Ondoko problema ebatzi nahi dugu: A eta B aireportuak emanda, zein da Atik Bra hegazkinez joateko geldialdi kopuru minimoa?

   a) Grafoa korritzeko algoritmo ezagunetatik, zein uste duzu egokiena dela? Zergatik? Aukeratutako algoritmoari egin beharreko aldaketak azal itzazu.

   b) Ezagutzen dituzun grafoei buruzko algoritmoen artean, problema hau ebazten duten haietako bakoitzaren denbora-konplexutasuna esan ezazu

   c) Aurreko bi ataletan aipatutakoen artean, zeinekin gelditu zinateke azkenean? Zergatik?

13) `G=(Erpinak, Ertzak)` grafoa zuhaitza ote den mugatzen duen algoritmoa idatzi. Grafoa konexua balitz, algoritmo berdina erabiliko zenuke? Horrela ez balitz, aurrebaldintza bezala grafo konexua eskatuko lukeen algoritmoa idatzi.

14) Grafo batek ziklorik ote duen mugatuko duen algoritmoa idaztea eskatzen da

   a) grafoa ez-zuzendu denean, eta

   b) grafoa zuzendu denean.

   Aurreko ataletan sakonerako korritzea erabili baduzu, berridatz itzazu algoritmoak zabalerako korritzea erabiliz problema berdinak ebatzi ditzaten, eta alderantziz.

   Zein estrategia nahiago duzu? Arrazoi sendorik baduzu horretarako? Zein?

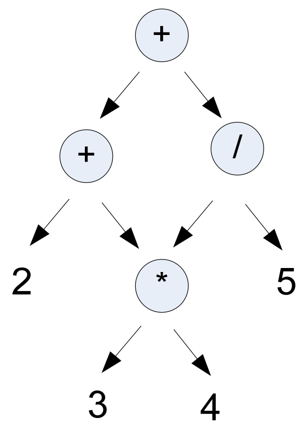
15) (X_j, Y_j) jatorri puntutik (X_n, Y_n) helmuga puntura zenbat bide posible existitzen den mugatzen duen algoritmo bat idatzi bedi. Puntuen koordenadak zenbaki arruntak direla suposatu. Bestalde, (X, Y) puntu batetik beste puntu batera joateko eman daitezkeen pausoak (X+1, Y) eta (X, Y +1) bakarrik izango dira. Algoritmoaren exekuzio-denbora aztertu.

16) Jakina da bide oro Erromara doala. Gida on bat erabiliz eta errepide mapa bat erabiliz, DAG bat marraztu dugu (grafo zuzendu aziklikoa) hamaika ibilbide on jasotzen dituena gure hiritik Erromara iristeko. Emandako DAGa erabiliz, gure hiritik Erromara dauden ibilbide kopurua kalkulatuko duen metodoa diseinatzea eskatzen zaizu bai eta haren denbora-analisia kalkulatzea ere.

17) *Esfortzulogia* Fakultateko Ikasketa Planak N irakasgai ditu. Irakasgaiak elkarren artean goi-baldintza bitartez erlazionatuta daude: A irakasgaia B irakasgaiaren goi-baldintza bada, orduan ikasleak B-n matrikula egin ahal izateko ikasleak A irakasgaia aurreko urtean gainditua izan beharko du. Ikasketa planean hasierako zenbait irakasgai badago (hots, goi-baldintzak ez dituena), bai eta bukaerako zenbait irakasgai ere (hots, beste irakasgaien goi-baldintza ez dena); eta , begi bistakoa den bezala, ez dago goi-baldintzen kate zirkularrik (ezinezkoak bailirateke bertako irakasgaiak egitea). Ikasleak nahi haina irakasgai aldi berean egiteko libre dira, noski, goi-baldintzak errespetatzen dituzten bitartean. Irakasgai guztiak derrigorrezkoak dira eta uneren batean gainditu behar dituzte titulu eskuratu nahi badute.

DEA irakasgaia behin eta berriro ez gainditzeaz nazkatuta zaude eta Esfortzulogiara joatea pentsatzen ari zara, bertako irakasgaiak esfortzurik gabe gainditzen baitira eta lanbide-irteera handikoa baita. Baina merezi ote dizun ikusi nahi duzu. Zehazki, jakin nahi duzuna titulua lortzeko beharko duzun urte kopuru minimoa da. Bila ezazu algoritmo eraginkor bat kopuru minimo hori kalkulatzeko. Problema ebazteko erabili duzun teknika xehetasunez azal ezazu.

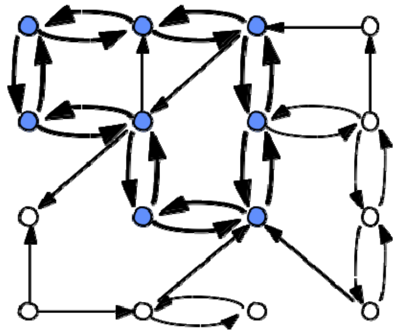
18) Espresio aritmetikoa DAGen (grafo zuzendu aziklikoen) bidez adieraz daiteke. Adierazpen hau zuhaitzen bidezkoa baino trinkoagoa da, errepikatutako azpi-espresioak behin bakarrik agertzen dira eta. Adibidez, irudiko DAGak 2 + 3 * 4 + (3 * 4)/5 espresio aritmetikoa adierazten du. Eragile (edo barne adabegi) bakoitzak eragigai (edo arku) bi ditu zehazki. Ezaugarri hauek dituen DAGa ebaluatuko duen algoritmo lineal bat adabegien kopuruan idatzi. Bere denbora-ordena ere kalkula ezazu.



19) Grafo bat *birpartitua* da baldin eta soilik baldin bere erpinen multzoa bi azpimultzo disjuntutan partitu badaiteke non grafoko ertz bakoitzeko erpinak multzo desberdinetan dauden.

Bila ezazu grafo konexu eta ez zuzendu bat *bipartigarria* den ala ez mugatzen duen eta ertzen kopuruan lineala izango den algoritmo bat.

20) Grafo zuzendu bat emanik, *eraztuna* deritzogu hiru erpin edo gehiago ziklo moduan eta norantza bietan konektatuta dituen serieari. Adibidez, irudiko grafo zuzenduan:



beltzez markaturik dago grafo honek duen eraztun bakarra. Sakonerako korritzean inspi- ratuz, diseina ezazu algoritmo eraginkor bat grafo zuzendu bat emanik honek gutxienez eraztun bat duen ala ez kalkulatuko duena. Zure soluzioaren denbora-ordena kalkula ezazu.

21) Zuhaitz baten *diametroa* edozein erpin bikote arteko distantzia guztietatik distantzia handiena da. Zuhaitz baten diametroa kalkulatzen duen algoritmo lineal bat eraikitzea eskatzen da.

22) G=(N,A) grafo ez-zuzenduaren G'=(N',A') azpigrafoa osagai konexu bat dela esaten da, baldin eta soilik baldin G' konexu bada eta G-ren G"=(N",A"") azpigrafo konexuak existitzen ez badu N'⊂N" edo A'⊂A" betez (hau da, azpigrafo konexu maximala da).

Grafo baten osagai konexu guztiak adierazteko grafoen gaineko zabalerako korritzea erabil ezazu. OK(1,…,n) egitura eskuragarri duzu osagai konexuak metatzeko, bertako OK(i) osagaiak osagai konexu bat biltegi baitezake. Gainera osagai konexu bakoitzeko adierazpidea ekoizteko ondorengo eragiketak erabil ditzakezu:

- Sortu-Grafoa(G): erpinik eta ertzik gabeko G grafoaren hasieraketa
- Erpina-Gehitu(G,i): i erpina G grafoari gehitu
- Auzokidea-Gehitu(G,i,j): G grafoko i erpinari j erpin auzokidea gehitzen zaio (oharra, i erpinak G grafokoa izan behar du eragiketa aplikatu ahal izateko).

23) Grafo konexu ez-zuzendu eta pisudun bat dugu. Grafoko *k* arku arinenak eraginkorki mugatuko dituen algoritmo bat egizu, jakinik $k \in o(a)$ dela (a grafoko ertz kopurua izanik) eta gehienez erabilgarri duzun espazio estra o(a) dela (hau da, espazio estrak ezin dun a–n lineala izan). Zure soluzioa arrazoitu ondoren, aztertu haren denbora ordena eta memoria espazio estra.

24) *Baso* bat zuhaitzez osatutako grafo bat da. G=(N,A) grafo ez zuzendu bat emanik, G grafoa basoa den ala ez erabakitzen duen algoritmoa egizu. Grafoa basoa denean, basoko zuhaitz kopurua itzuli behar du algoritmoak. Algoritmoaren analisia egizu.

25) Prozesadore bakarra izanik n ataza egin behar ditugu. Ataza batzuk beste batzuen menpe daude; hau da, ataza baten aurrekari guztiak amaitu ez diren bitartean, bera, menpekoa, ezin egin liteke. Adibidez, {1,2,3,4,5} atazak izan ditzakegu eta honako menpetasun informazioa: 2 ataza 1en menpekoa da, eta 3,4 atazak ere 1en menpekoak, aldiz 5 ataza 3 atazaren menpe dago.

Planifikazio egingarri bat atazen permutazio bat da, non atazak permutazioan jasotako ordenan egikari litezkeen eta ataza bat hasten denean, honen aurrekari guztiak dagoeneko amaituak dauden.

a) Planifikazio egingarri bat kalkulatuko duen algoritmo bat egizu, baldin eta existitzen badu. Zein da zure soluzioren ordena? Aurreko adibidean egingarriak lirateke: [1,3,5,2,4], [1,2,3,4,5],… baina ez [1,5,2,3,4]

b) Adibide batez azaldu ezazu planifikazio egingarririk ez duen egoera bat.

c) Demagun i ataza bakoitzak di iraupena esleitua duela. Adibidez, d1=5, d2=10, d3=3, d4=7, d5=4. Denbora minimoan ataza guztiak burutzeko algoritmo bat idatz ezazu, suposatuz nahi adina prozesadore dituzula. Zein da zure soluzioaren konplexutasun ordena?