DEA II:

Erreminta matematikoak

Esponentzialak eta logaritmoak: $\forall a, b, c, n > 0$. Bestalde, logaritmoen oinarriak 1 baino handiagoak dira, eta ezer aipatzen ez bada $\lg a = \log_2 a$.

$\log_a 1 = 0$	$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$	$a^{\log_a b} = \log_a a^b = b$
$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
$\log_a \frac{b}{c} = log_a b - \log_a c$	$\log_a b = \frac{1}{log_b a}$	$a^0 = 1$
$\ln 2 = 0.7$, $\lg e = 1.44$ eta $\lg 10 = 3.32$	$\log_a \frac{1}{c} = -\log_a c$	$a^{-1} = \frac{1}{a}$
$\lg \lg a = \lg(\lg a)$	$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} <= n$	$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$
$\lg^a b = (\lg b)^a$	$n <= 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$	$(a^b)^c = (a^c)^b = (a^{b \cdot c})$

Batukariak: $\forall a, b, c, n > 0$, $a <= b$

$\sum_{i=a}^{b} i = \frac{(a+b)(b-a+1)}{2}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n)n}{2}$

$\sum_{i=a}^{b} c^i = \frac{c^{b+1}-c^a}{c-1}$ $\qquad$ $\sum_{i=a}^{b} \frac{1}{c^i} = \frac{1/c^{b+1}-1/c^a}{(1/c)-1}$

$\sum_{i=a}^{b} i^2 = \frac{b^3-a^3}{3} + \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{b-a}{6}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

$\sum_{i=a}^{b} i \cdot c^i = \frac{b \cdot c^{b+1} - a \cdot c^a}{c-1} + \frac{c^{a+1}-c^{b+1}}{(c-1)^2}$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$

Funtzio deribatuak, integralak eta batuketak integral bidez bornatzen: a edozein konstantea da, x-k aldagaia adierazten du eta u eta v x aldagai gaineko funtzioak (positiboak, bornaketen kasuan) dira.

$a' = 0$	$x' = 1$	$(u+v)' = u' + v'$
$(-u)' = -(u')$	$(a \cdot v)' = a \cdot v'$	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$(u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$	$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$	$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	

$$\int a \cdot u \cdot dx = a \cdot \int u \cdot dx \qquad \int -u \cdot dx = -\int u \cdot dx$$
$$\int (u+v) \cdot dx = \int u \cdot dx + \int v \cdot dx \qquad \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

f jarraia eta gorakorra denean:

$$\int_{a-1}^{b} f(x) \cdot dx <= \sum_{i=a}^{b} f(i) <= \int_{a}^{b+1} f(x) \cdot dx$$

f jarraia eta beherakorra denean:

$$\int_{a}^{b+1} f(x) \cdot dx <= \sum_{i=a}^{b} f(i) <= \int_{a-1}^{b} f(x) \cdot dx$$

Exekuzio-denbora funtzio desberdinak konparatzeko erremintak:

Demagun problema bat ebazteko algoritmo bi lortu ditugula non $f(n)$ eta $g(n)$ funtzioek haien exekuzio denborak adierazten duten. Soluzio eraginkorrenarekin geratzeko exekuzio-denbora funtzioak alderatu behar ditugu. Aukera desberdinak ditugu hori egiteko: $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

1. $\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow \Theta(f(n)) \subset \Theta(g(n))$ edo $f(n) \in o(g(n))$
2. $\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$ eta $g(n) \notin O(f(n))$
3. $\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = K \in \mathbb{R}^{+} \Rightarrow \Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$ edo $f(n) \in \Theta(g(n))$
4. **L'Hopitalen erregela**: betetzen badira
   (a) $\lim_{n\rightarrow\infty} f(n) = \lim_{n\rightarrow\infty} g(n) = 0$, edo $\lim_{n\rightarrow\infty} f(n) = \lim_{n\rightarrow\infty} g(n) = \infty$,
   (b) $f(n)$ eta $g(n)$ funtzioak arruntetatik $f^{\star}(x)$ eta $g^{\star}(x)$ errealetara edagarriak badira
   (c) $f^{\star\prime}(x)$ eta $g^{\star\prime}(x)$(funtzio hedatuak deribagarriak badira) eta
   (d) $\exists \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{f^{\star\prime}(x)}{g^{\star\prime}(x)}$

   orduan

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{x\rightarrow\infty} \frac{f^{\star\prime}(x)}{g^{\star\prime}(x)}$$

Azkuntza abiadura: exekuzio-denboren ordenen klasifikazioa. $\forall a, k$ konstanteak eta $a > 0$

$$O(1) \subset O(\lg n) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \lg n) \subset O(n\sqrt{n}) \subset O(n^2) \subset O(n^3)$$

$$O(n^k) \subset O(a^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$$

$$O(kf(n)) = O(f(n))$$