[1]

ARIKETAK

1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non

$$f(x, y, z, t) = (x - y - z, y + z + t, 2x - y - z + t), \forall (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

Aurkitu $\mathbb{R}^4$ eta $\mathbb{R}^3$-ren oinarriak f-ri elkartutako matrizea $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_r & 0 \end{pmatrix}$ erakoa izan dadin. Aurkitu ahal dira bi oinarriak non f-ri elkartutako matrizea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ den?.

2.- Izan bedi ondorengo matrizea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{R}).$$

Lortu $P \in GL_4(\mathbb{R})$ eta $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ matrize aldernazgarriak non PAQ $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erakoa izan dadin.

3.- Izan bedi $P \in GL_n(K)$. Froga ezazu P-tik I_n-ra pasa ahal dela transformazio elementalen bidez lerroetan bakarrik edo zutabeetan bakarrik erabiliz. Ondorioztatu P-ren alderantzizkoa kalkulatzeko metodo bat. Lortu transformazio elementalen bidez ondorengo matrizearen alderantzizkoa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x - 2y + 2z, -x + 3y - z, x + 4z)$ den.

(i) Ondorengo hiru A matrizeentzat aurkitu, existitzen badira, oinarriak β_1, β_2 non $M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) = A$ den.

---

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Existitzen al da β oinarria non $M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ den?

2.- Izan bitez $A \in Mat_{m\times n}(K)$ eta $B \in Mat_{n\times t}(K)$. Froga ezazu $rg(AB) \leq min\{rg(A), rg(B)\}$ eta eman desberdintza hertsia betetzen duten adibideak. Ondorioztatu, $A \in Mat_{m\times n}(K)$ eta $B \in Mat_{n\times m}(K)$ $n < m$ izanik, orduan AB ez dela alderanzkarria.

3.- Izan bedi V K espazio bektoriala eta $f \in End(V)$.

(i) Froga ezazu $Imf = Kerf$ dela baldin eta soilik baldin $f^2 = 0$ eta $dimV = 2rg(f)$ bada.

(ii) Demagun aurreko ataleko baldintzak betetzen direla eta izan bedi $\{f(v_1), ..., f(v_m)\}$ Imf-ren oinarria. Froga ezazu $\{f(v_1), ..., f(v_m), v_1, ..., v_m\}$ V-ren oinarria dela. Zein da f-ri elkartutako matrizea oinarri horrekiko?

(iii) Izan bedi $A \in Mat_{2m}(K)$. Froga ezazu $A^2 = 0$ eta $\mathrm{rg}(A) = m$ dela baldin eta soilik baldin existitzen bada $P \in GL_{2m}(K)$ non $A = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$ den.

(iv) Idatzi $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea $P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$ moduan. (Ohartu $A^2 = 0$ eta $rg(A) = 2$ dela.)

4.- Izan bedi $AX = B$ sistema bateragarria eta ez homogeneoa m ekuazio eta n ezezagunekin eta izan bedi $t = n - rg(A)$. Froga ezazu existitzen direla $t+1$ soluzioak linealki independenteak $X_0, ..., X_t$ non sistemaren edozein soluzioa $\mu_0 X_0 + ... + \mu_t X_t$ modu bakarrean adierazten den $\mu_0 + ... + \mu_t = 1$ izanik. (Argibidea: $\lambda_0, ..., \lambda_t \in K$ badira orduan $(1 - \lambda_0 - ... - \lambda_t) + \lambda_0 + ... + \lambda_t = 1$ da.)

Aurkitu hiru ekuazio eta hiru ezezaguneko sistema non soluzioen multzoa $S = \{\lambda u_1 + \mu u_2 \mid \lambda + \mu = 1\}$ den, $u_1 = (1, 1, 1)$ eta $u_2 = (-2, 0, 3)$ izanik.

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia