[1]

ARIKETAK

1.- Ondorengo aplikazioetatik zeintzuk dira linealak?

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, f(x,y) = (x, x+y, 0, y)$; (iii) $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, f(x,y) = (\overline{x}, y)$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, f(x,y) = (x^2, x+y, 0, y)$; (iv) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, f(x,y,z) = (0, x-iz, iy)$;

2.- Lortu $Kerf$ eta Imf azpiespazioen oinarriak ondorengo f aplikazio linealentzat eta egiaztatu dimentsioen arteko erlazio ezaguna:

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = x - y + z$;

(vii) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + 5x_2 - x_4, 2x_1 + x_2 + x_3)$;

(viii) $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, f(x,y,z) = (x + iy + (1-i)z, x + iz, x + y - 2z)$.

3.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x,y,z) = (x+2y+z, -x-y+z, x+3y+3z)$ den. Lortu $< (1,2,1) >, \{(x,y,z) \mid x - y + 2z = 0\}$ eta $< (1,0,1), (2,-2,0) >$ azpiespazioen irudi eta aurreirudiak.

4.- Arukitu, kasu bakoitzean, ezarritako baldintzak betetzen dituen $f \in L(V, V')$ aplikazio lineal bakarra.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(1,0,0) = (2,1,0), f(0,1,0) = (0,1,-1), f(0,0,1) = (0,0,1)$;

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(1,1,1) = (2,1), f(2,2,1) = (1,1), f(2,1,-1) = (0,3)$.

5.- Aurkitu ezarritako baldintzak betetzen dituen f aplikazio lineal bat.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$;

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, Imf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

6.- Izan bitez $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0, x - 2t = 0\} \leq \mathbb{R}^4$ eta $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \leq \mathbb{R}^3$. Egiaztatu $dimU = dimV$ dela eta lortu U eta V-ren arteko isomorfismo bat.

7.- Izan bitez $W_1 = \{(x,y,z,t) \mid x = z\}$, $W_2 = \{(x,y,z) \mid x - y - z = 0, x - y + z = 0\}$, $U_1 = \{(x,y,z) \mid y = z\}$ eta $U_2 = \{(x,y,z) \mid x = y = 0\}$ $\mathbb{R}^3$ espazioko azpiespazioak. Aurkitu $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ non: $f^{-1}(W_1) = U_1, f(W_2) = U_2$ betetzen den.

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

8.- Izan bitez $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ endomorfismoa non $f(x,y,z)=(x-y+2z,x+z,-x+y)$ eta $\beta=\{v_1,v_2,v_3\}$ non $v_1=(1,1,-1), v_2=(1,0,1)$ eta $v_3=(3,1,0)$ diren.

(i) Lortu $M_{\beta_k}^{\beta_k}(f), M_{\beta}^{\beta}(f), M_{\beta}^{\beta_k}(f)$ eta $M_{\beta_k}^{\beta}(f)$. Zer erlazio dago lehenengo bi matrezeen artean? eta azkenengo bien artean?

(ii) Froga ezazu f bijektiboa dela eta kalkulatu f^{-1}. $A=M_{\beta_k}^{\beta_k}(f)$ bada, zein da A^{-1}?

(iii) Kalkulatu A^2 eta A^3 matrizeen biderkaketa erabili gabe.

PROBLEMAK

1.- Izan bitez V eta V' dimentsio finituko bektore espazioak, $W_1\leq V$ eta $W_2\leq V'$. Froga ezazu exititzen dela $f\in L(V,V')$ non $Kerf=W_1$ eta $Imf=W_2$ diren baldin eta soilik baldin $dimW_1+dimW_2=dimV$ bada.

2.- (i) Izan bitez V K gaineko bektore espazioa eta $f\in End(V)$. Froga ezazu $f^2=f\circ f=0$ dela baldin eta soilik baldin $Imf\leq Kerf$ bada.

(ii) Aurkitu $f\in End(\mathbb{R}^3)$ non $f^2=0$ eta $Kerf=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$ den. Existitzen al da $f\in End(\mathbb{R}^3)$ non $f^2=0$ eta $Kerf=<(1,1,1)>$ diren?

3.- (i) Izan bedi V K-b.e. eta $f,g\in End(V)$. Eman $g\circ f=0$-ren karakterizazioa Imf eta $Kerg$ azpiespazioak erabiliz.

(ii) Izan bedi $f\in End(V)$. Froga ezazu f ez dela bijektiboa baldin eta soilik baldin existitzen bada $g\in End(V)$ aplikazio ez nulua non $g\circ f=0$ den.

(iii) Izan bedi $f\in End(\mathbb{R}^3)$ non $f(x,y,z)=(x+y,y+z,x-z)$ den. Kalkulatu $g\in End(\mathbb{R}^3)$ es nulua non $g\circ f=0$ den.

(iv) Izan bedi $A\in Mat_n(K)$ froga ezazu, (ii) atala erabiliz, A ez dela alderanzgarria baldin eta soilik baldin existitzen bada $B\in Mat_n(K)$ es nulua non $B\cdot A=0$ den. Kalkulatu B matrizea $A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-1&0&2\\-1&4&4\end{pmatrix}$ bada.

4.- (i) Izan bedi V dimentsio finituko K gaineko bektore espazioa eta demagun $f\in End(V)$ non $f^2=f\circ f=f$ den. Froga ezazu $V=Kerf\oplus Imf$ dela eta f Imf-ra murrizterakoan identitate aplikazioa dela. (Argibidea: $Kerf\cap Imf=\{0_V\}$ berdintzatik $V=Kerf\oplus Imf$ dela ondorioztatzen da, zergaitik?)

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

(ii) Demagun $V = W_1 \oplus W_2$ dela- Froga ezazu $f \in End(V)$ bakarra existitzen dela non $f^2 = f, Kerf = W_1$ eta $Imf = W_2$ den. (Argibidea: Ohartu f-k bldintza guztiak betetzen baditu, $f_{|W_2} = 1_{W_2}$ dela. Honek adierazten digu nola definitu behar dugun f eta frogatzen du gainera bakartasuna.)

(iii) Aurkitu $f \in End(\mathbb{R}^4)$ bakarra non $f^2 = f, Kerf = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2, x_3 = x_4\}, Imf = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4, x_2 = -x_3\}$ den.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia