

1

ARIKETA

1.- Aztertu ondoko enuntziatuak egiazkoak diren ala ez. (Erantzuna ezekoa denean kontradibide bat jarri).

- (i)  $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$ ;
- (ii)  $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$ ;
- (iii)  $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$ ;
- (iv)  $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ .

2.- Izan bedi  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  aplikazioa non  $f(x, y) = x - y$  den.

(i) Aztertu ondoko baieztapenetik zeintzuk diren zuzenak:

$2 \in f((0, 1) \times (-1, 0))$ ;  $0 \in f((0, 1) \times (0, 1))$ ;  $(1, 0) \in f^{-1}([-1, 1])$ ;  $(-2, 3) \in f^{-1}([-1, 0])$ .

(ii) Kalkulatu  $f(\mathbb{R} \times (-1, 1))$  eta  $f^{-1}(0)$ .

3.- Zehaztu injektiboak, suprajektiboak eta/edo bijektiboak diren ondorengo aplikazioak. Aurkitu alde

ranzkarriak diren aplikazioen alderantzizko aplikazioa.

- (i)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , non  $f(n) = n + 1$  den  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- (ii)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , non  $f(n) = n - 2$  den  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .
- (iii)  $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ , non  $f(x) = x^3$  den  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ .
- (iv)  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ , non  $f(x) = 3x - 1$  den  $\forall x \in \mathbb{Q}$ .
- (v)  $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ , non  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$  den  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ .

4.- Zehaztu ondoko multzoek eraztun edo gorputz egitura duten ala ez emandako eragiketeekin:

(i)  $A = \{0, 1\}$  multzoa ondoko eragiketeekin:  $1 + 1 = 0 + 0 = 0$ ,  $1 + 0 = 0 + 1 = 1$ ,  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \cdot 0 = 0$ .

(ii)  $A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ , batuketa eta biderkaketarekin.

(iii)  $A = \{n + \sqrt{2}m \mid n, m \in \mathbb{Q}\}$ , batuketa eta biderkaketarekin.

---

<sup>1</sup>OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

2

5.- Jarri ondorengo polinomioak,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  eta  $\mathbb{C}$  gainean, polinomio irreduzibileen biderkadura moduan:

- (i)  $f(x) = x^3 - 1$ .                      (ii)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ .
- (iii)  $f(x) = x^4 + 1$                       (iv)  $f(x) = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ .

---

### *PROBLEMAK*

---

1.- Izan bedi  $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  eta ondorengo erlazioa:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \mid x_1 = \lambda x_2 \text{ eta } y_1 = \lambda y_2$$

Froga ezazu baliokidetasun erlazioa da, aurki ezazu  $(x_1, y_1) \in A$  elementuaren baliokidetasun klasea eta eman ezazu zatidura multzoaren interpretazio geometrikoa.

2.- Izan bedi  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   $f(x, y) = (x + y, x - y)$  erlazioaren bitartez definituta dagoen aplikazioa.

(i) Frogatu  $f$  bijektiboa dela eta kalkulatu  $f^{-1}$ . Frogatu  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$  dela.

(ii) Aurkitu  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplikazio bat, non  $(f \circ g)(x, y) = (y, x) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Era berean, aurkitu  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  aplikazio bat, non  $(h \circ f)(x, y) = (y, x) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

3.- Izan bedi  $(G, \otimes)$  talde bat.  $g_0 \in G$  elementu finko bakoitzarako ondoko aplikazioa definitzen dugu:

$$T_{g_0} : G \rightarrow G, T_{g_0}(x) = g_0 \otimes x.$$

Frogatu  $T_{g_0}$  aplikazioa bijektiboa dela eta kalkulatu bere alderantzizkoa. Zehaztu  $T_{g_0} \circ T_h$ . Zein da  $\{T_g \mid g \in G\}$  multzoaren egitura?.

3

4.-

- (i) Izan bedi  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ . Frogatu  $f(x)$  polinomioaren erro posibleak  $\mathbb{Q}$  gainean  $r/s \in \mathbb{Q}$  modukoak direla, non  $(r, s) = 1$ ,  $r|a_0$  eta  $s|a_n$ .
- (ii) Izan bedi  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  polinomio monikoa. Frogatu bere erro razional guztiak osoak direla, hots  $r/s \in \mathbb{Q}$   $f$ -ren erroa bada orduan  $r/s$  zenbaki osoa da.
- (iii) Aurkitu ondorengo polinomioen erro razional guztiak:  $x^n - 1$ ,  $x^n + 1$ ,  $3x^3 + x - 5$ ,  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ .