[1]

ARIKETAK

1.- Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non,

$$f(x,y,z) = (3x - y + z, -2x + 4y - 2z, -2x + 2y).$$

Aztertu $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 0, y - z = 0\}$ f- aldagaitzak den ala ez eta baiezko kasuan lortu azpiespazioaren oinarri bat, luzatu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bateraino eta eman f-ri elkartutako matrizea oinarri horrekiko.

EBAZPENA :

Argi eta garbi, $W = \langle(1,-2,-2)\rangle$ da. Beraz $f(W) = \langle f(1,-2,-2)\rangle$ da. $f(1,-2,-2) = (3,-6,-6)$ eta beraz $f(W) \leq W$ da, hau da, f-aldagaitza da. $\beta_W = \{(1,-2,-2)\}$ luzatzen dugu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bateraino: $\beta = \{(1,-2,-2),$

$,(1,0,0),(0,1,0)\}$. f-ri elkartutako matrizea oinarri honetan hurrengoa da:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.- Aztertu $f(x,y,z) = (-x - z, -7x + 4y + 13z, x - 3z), \forall (x,y,z) \in K^3$ K^3-ko endomorfismoa K gainean diagonalgarriak denentz, K gorputza $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ izanik. Diagonalgarria bada, aurkitu K^3-ren oinarri bat non elkartutako matrizea diagonala den.

EBAZPENA :

f K gainean diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo baldintzak betetzen badira:

(i) $\chi_f(x)$ polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gainean daude.

(ii) λ balio propio bakoitzarentzat: $dimV(\lambda) = m(\lambda)$.

(i) Polinomio karakteristikoa kalkulatzeko hurrengo determinantea kalkulatu behar dugu:

$$\chi_f(x) = det(xI_3 - M_{\beta_k}(f)) = det \begin{pmatrix} x+1 & 0 & 1 \\ 7 & x-4 & -13 \\ -1 & 0 & x+3 \end{pmatrix}$$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Bigarren zutabeko elementuez garatuz:

$$\chi_f(x) = (x-4)det\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & x+3 \end{pmatrix} = (x-4)(x+2)^2$$

Beraz polinomio karakteristikoaren erroak $4, -2 \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ daude. Orduan lehenengo baldintza hiru gorputzetan betetzen da.

(ii) Kalkula dezagun $V(-2)$, $dimV(4) = 1 = m(4)$ dela badakigu eta. $V(-2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f(x,y,z) = (-2)(x,y,z)\}$ denez hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} -x - z & = & -2x \\ -7x + 4y + 13z & = & -2y \\ x - 3z & = & -2z \end{cases}$$

Sistemaren soluzioa $y = -x, z = xda \forall x \in \mathbb{R}$. Beraz $dimV(-2) = 1 \neq m(-2) = 2$ eta orduan f ez da diagonalgarria K gainean.

3.-Aztertu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -4 & 8 \\ -4 & -2 & 5 & -8 \\ -4 & -2 & 6 & -9 \end{pmatrix}$ matrizea $\mathbb{R}$ gainean diagonalgarriak denentz.Ahal denean, aurkitu forma diagonala,D, eta eman $P \in GL(n, \mathbb{R})$ non $P^{-1}AP = D$ den eta kalkulatu matrizearen $n$garren berredura edozein $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

A K gainean diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo baldintzak betetzen badira:

(i) $\chi_A(x)$ polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gainean daude.

(ii) λ balio propio bakoitzarentzat: $dimV(\lambda) = m(\lambda)$.

(i) A-ren polinomio karakteristikoa kalkulatzeko hurrengo determinantea kalkulatu behar dugu:

$$\chi_A(x) = det(xI_4 - A) = det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 4 & -4 \\ -4 & x-3 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & x-5 & 8 \\ 4 & 2 & -6 & x+9 \end{pmatrix}$$

Oinarrizko aldaketak erabiliz erraz konprobatzen da $\chi_A(x) = (x+1)^2(x-1)^2$ dela. Beraz lehengo baldintza hiru gorputzetan betetzen da.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

(ii) Kalkula dezagun $V(-1) = \{(x,y,z,t) \in K^3 \quad | \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\}$.

Hemen hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} x - 2z + 2t & = & 0 \\ x + y - z + 2t & = & 0 \\ -2x - y + 3z - 4t & = & 0 \end{cases}$$

Sistemaren soluzioa: $(2z - 2t, -z, z, t) \forall z, t \in K$.

Beraz $V(-1) = \langle (2,-1,1,0), (-2,0,0,1) \rangle$ da. Eta ondorioz $dimV(-1) = m(-1)$ da.

Ikus dezagun orain zer gertatzen den $V(1)$ azpiespazioarekin. Kasu honetan hurrengo sistema ebatzi beharko genuke:

$$\begin{cases} -4z + 4t & = & 0 \\ 4x + 2y - 4z + 8t & = & 0 \\ -4x - 2y + 6z - 10t & = & 0 \end{cases}$$

Sistemaren soluzioa: $(x, -2x - 2z, z, z) \forall x, z \in K$. hemen ere $dimV(1) = m(1)$ betetzen da.

Orduan A matrizea diagonalgarria da hiru gorputz horietan eta dakigunez $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

Kalkula dezagun $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ohartu $A = PDP^{-1}$ denez $A^n = PD^nP^{-1}$ dela. D matrize diagonala denez $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eta hortxe daukagu berretura kalkulatzeko modu erreza.

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

4.- Erabaki ondorengo bikotean matrizeak antzekoak diren ala ez,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ eta } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

EBAZPENA :

Antzekoak diren ala ez jakiteko lehenego matrize bakoitzaren polinomio karakteristikoa kalkulatuko dugu. Erraz ikusten da $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-3)$ eta $\chi_B(x) = (x-2)^2(x-3)$. Orduan oraindik ezin dugu zihurtatu baliokideak diren ala ez. Ikus dezagun, baldin badute, matrize bakoitzaren forma diagonala.

A matrizearen kasuan $V(2) = \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle$ da eta beraz A diagonalgarria da eta bere forma diagonala $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ da.

B matrizearen kasuan $V(2) = \langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle$ eta hau ere diagonalgarria da eta bere forma diagonala A-k duen berbera da.

Orduan A eta B baliokideak dira existitzen direlako P_1, P_2 matrize alderanzgarriak non:

$$P_1^{-1}AP_1 = D = P_2^{-1}BP_2$$

Ondorioz Atik Brako aldaketa matrizea $P_1P_2^{-1}$ matrizea da.

PROBLEMAK

1.- Izan bedi $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ izanik.

(i) Ze baldintzat bete behar dituzte a eta b matrizea diagonalgarria izan dadin?

(ii) Diagonalgarria denean, eman bere forma diagonala D eta aldaketa matrizea P. Lortu matrizea, D eta P-ren arteko erlazioa.

EBAZPENA :

(i) Dakigunez matrizea diagonalgarria izateko hurrengo bi baldintzak bete behar ditu:

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

a.- Polinomio karakteristikoaren erroak errealak dira.

b.- λ balio propio bakoitzarentzat: $dimV(\lambda) = m(\lambda)$.

a.- Polinomio karakteristikoa: $(x-5)(x+1)(x-b)$ da. Beraz lehenengo baldintza betetzen da a, b guztietarako.

b.- Hurrengo kasuak bereizten ditugu:

b1.- $b \neq 5, -1$ bada orduan badakigu matrizea diagonalgarria dela.

b2.- $b = 5$ bada orduan $m(5) = 2$ denez matrizea diagonalgarria izateko $dimV(5) = 2$ denentz ikusi behar dugu. $V(5)$ lortzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} -6y + az & = & 0 \\ 3x & = & 0 \end{cases}$$

Soluzioen multzoa: $\{(0, az/6, z) \quad | \quad z \in \mathbb{R}\}$

Argi eta garbi $dimV(5) = 1$ da beraz kasu honetan matrizea ez da diagonalgarria.

b3.- $b = -1$ bada $m(-1) = 2$ denez matrizea diagonalgarria da baldin eta soilik baldin $dimV(-1) = 2$ bada. $V(-1)$ azpiespazioaren dimentsioa lortzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} 6x & = & 0 \\ az & = & 0 \end{cases}$$

$a \neq 0$ bada orduan $V(-1) = \{(0, y, 0) \quad | \quad y \in \mathbb{R}\}$ da beraz matrizea ez da diagonalgarria. $a = 0$ kasuan $V(-1) = \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ da eta kasu honetan matrizea diagonalgarria da.

(ii) Diagonalgarria direneko kasuak hauek dira: $b \neq 5, -1$ eta $b = -1, a = 0$.

a.-$b \neq -1, 5$ bada hurrengo azpiespazio propien oinarriak behar ditugu: $V(-1)$,$V(5)$ eta $V(b)$.

$V(-1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 6x = 0, az = 0, (b+1)z = 0\}$ orduan, $b \neq -1$ denez, $V(-1) =< (0, 1, 0 >$ da.

$V(5) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad -6y + az = 0, 3x + (b-5)z = 0\}$ orduan $V(5) =< ((5-b)/3, a/6, 1) >$ da.

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

$V(b) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 3x = 0, (-1-b)y + az = 0\}$ orduan, $b \neq -1$ denez, $V(b) =< (0, a/(b+1), 1 >$ da.

[6]

Beraz $P = \begin{pmatrix} 0 & (5-b)/3 & 0 \\ 1 & a/6 & a/(b+1) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ diagonala dugu.

b.- $b = -1$ eta $a = 0$ kasua. $V(-1)$ aurreko atalean kalkulatu dugu: $V(-1) = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle$ eta $V(5)$ kalkulatzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{cases} -6y & = & 0 \\ 3x - 6z & = & 0 \end{cases}$$

Orduan $V(5) =< (2,0,1) >$ da eta $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizearekin $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ diagonala dugu.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ondorengo endomorfismoa:

$$f(x,y,z) = (2x - y + z, x + z, x - y + 2z)$$

(i) Froga ezazu f diagonalgarria dela eta aurkitu β oinarri bat non f-ri elkartutako matrizea diagonala den.

(ii) Kalkulatu $f^{10}(1,-1,1)$ eta aurkitu $v \in \mathbb{R}^3$ bektorea non $f^{10}(v) = (1,-1,1)$.

(iii) Lortu $g \in End(\mathbb{R}^3)$ non $g^2 = f$ den.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

(i) $\chi_f(x) = det\,(xI_3 - M_{\beta_k}(f)) = det \begin{pmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x-2 \end{pmatrix} = (x-1)^2(x-2)$ da. Beraz erro guztiak errealak dira. Bestalde $V(1)$ lortzeko hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\{ x - y + z \quad = \quad 0$$

Orduan $V(1) = \langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle$ da.

[6] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[7]

$V(2)$ azpiespazioaren ekuazioak hurrengoak dira:

$$\begin{cases} -y+z &= 0 \\ x-y &= 0 \end{cases}$$

$V(2) = \langle(1,1,1)\rangle$ da

Orduan $\beta = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonala da.

(ii) $f^{10}(1,-1,1)$ kalkulatzeko $M_\beta(f)$ matrizea erabiliko dugu. $M_\beta(f^{10}) = (M_\beta(f))^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$ denez:

$$f^{10}(1,-1,1) = ((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= ((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3\cdot 2^{10} \end{pmatrix} = (-2+3\cdot 2^{10}, -4+3\cdot 2^{10}, -2+3\cdot 2^{10})$$

Era berean eginez lortuko genuke v bektorea non $f^{10}(v) = (1,-1,1)$ den.

(iii) $g^2 = f$ berdintza betetzeko nahiko eta beharrezkoa da $(M_\beta(g))^2 = M_\beta(g^2) = M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ izatea. Orduan bilatzen ari gara matrize bat, $M_\beta(g)$, non bere karratua $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Adibidez $M_\beta(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ matrizeak betetzen du baldintza. Eta datu horrekin g guztiz zehazturik dago.

[7] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia