[1]

ARIKETAK

1.- Izan bitez σ eta ϕ $\sum_8$-ko ondorengo bi permutazioak:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

(i) Deskonposatu bi permutazioak ziklo disjuntuen biderkadura moduan.

(ii) Kalkulatu σ eta ϕ-ren signaturak.

(iii) Kalkulatu $\sigma^2\phi^2$ eta $(\sigma\phi)^2$.

(iv) Kalkulatu $\sigma^{-1}, \phi^{-1}, \sigma^{-1}\phi^{-1}, \phi^{-1}\sigma^{-1}$ eta $(\sigma\phi)^{-1}$.

EBAZPENA :

(i) σ permutazioarekin:

1ean hasi eta irudia egiten dugu berriro 1 lortu arte: $1 \to 4 \to 3 \to 1$, beraz (143) zikloa dugu.

2an hasita: $2 \to 5 \to 2$, beraz, (25) zikloa.

6an hasita: $6 \to 8 \to 6$, beraz (68) zikloa.

Orduan $\sigma = (143)(25)(68)$. Era berean $\phi = (1325)(467)$ dela konprobatzen da.

(ii) $\sigma = (14)(13)(25)(68)$ denez signatura 1 da eta $\phi = (13)(12)(15)(46)(47)$ denez signatura -1 da.

(iii) $\sigma^2\phi^2 = ((143)(25)(68))^2((1325)(467)^2 = (134)(12)(35)$

(iv) $\sigma^{-1} = (134)(25)(68)$, besteak era berean egiten dira.

---

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

2.- Froga ezazu, determinantea garatu gabe, $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ dela.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Oinarrizko aldaketak erabiliz kalkulatu dugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & a+b+c & a+c \\ 1 & a+b+c & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & a+c \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Azkenengo matrizean bi zutabe berdinak direnez determinantea nulua da.

3.- Kalkulatu ondorengo n ordenako matrizearen determinantea:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}.$$

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Hurrengo oinarrizko aldaketak egiten ditugu: $A^{(i)} \to A^{(i)} - A^{(n)}, i = 1, 2, ..., n-1$. Beraz hurrengo determinantea dugu:

$$\begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

Determinantearen garapena lehenengo zutabeko elementuekin egiten badugu, behin eta berriz, $(1-n)(2-n)...(-2)(-1)n = (-1)^{n-1}n!$ lortuko dugu.

---

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

4.- Eztabaidatu, eta ebatzi ahal denean, ondorengo ekuazio linealetako sistema:

$$\begin{cases} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & (2b-1)y & + & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 1 \end{cases}.$$

EBAZPENA :

Sistemaren matrizearen determinantea kalkulatuko dugu oinarrizko aldaketak erabiliz:

$$\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{vmatrix} = a(b-1)(b+1).$$

Hiru kasu bereizten ditugu:

(i) $a \neq 0, b \neq 1, -1$. Orduan determinantea ez da nulua eta Cramerren sistema da. Soluzio bakarra:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 2b-1 & 3 \\ 1 & b & b+3 \end{vmatrix} / a(b^2-1), y = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ a & 1 & b+3 \end{vmatrix} / a(b^2-1), \text{ eta}$$

$$z = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & 2b-1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} / a(b^2-1)$$

(ii) $b = 1$ kasua. Sistemaren matrizea $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ a & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Argi eta garbi bateragarri indeterminatua da, soluzioen multzoa $\{(x, 1-ax, 0) \quad | \quad x \in \mathbb{R}\}$ izanik.

(iii) $b = -1$ kasua. Sistemaren matrizea $\begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ a & -3 & 3 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Argi eta garbi bateragarri indeterminatua da, soluzioen multzoa hurrengo izanik:

$$\{x, (1-ax)/3, (2-2ax)/3) \quad | \quad x \in \mathbb{R}\}$$

---

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

(iv) $a = 0, b \neq 1, -1$. Sistemaren matrizea $\begin{pmatrix} 0 & b & 2 \\ 0 & 2b-1 & 3 \\ 0 & b & b+3 \end{pmatrix}$ da. Oinarrizko aldaketak lerroka eginez hurrengoa lortuko dugu:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 2 \\ 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & b & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{pmatrix}$$

Bateragarri determinatua soluzioen multzoa $\{(x, 0, 0) \quad | \quad x \in \mathbb{R}\}$ izanik.

PROBLEMAK

1.- $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ **antisimetrikoa** dela esaten da $a_{ij} = -a_{ji}$ bada, hots, $A = -A^t$ bada. Froga ezazu, A antisimetrikoa eta n bakoitiak badira orduan $det(A) = 0$ dela.

EBAZPENA :

$A = -A^t$ betetzen denez, $det(A) = det(A^t)$ eta determinantearen propietateak erabiliz hurrengoa lortuko dugu:

$$det(A) = (-1)^n det(A)$$

Argi eta garbi, $n = -1$ deneko kasuan, $det(A) = 0$ berdintza lortzen dugu.

2.- Froga ezazu n elementuko bi zenbaki serieak emanez $a_1, ..., a_n$ eta $b_1, ..., b_n$ K gorputz batean, non a_i desberdinak diren, polinomio bakar bat existitzen dela $f(X) \in K[X]$ koefizienteak K gainean eta maila $n-1$ baino txikiagoa edo berdina non $f(a_i) = b_i$ den $i = 1, ..., n$.

EBAZPENA :

Lortu behar dugu $f(X) = k_{n-1}X^{n-1} + ... + k_1X + k_0$ moduko polinomioa non $f(a_i) = b_i$ betetzen den $i = 1, .., n$. Orduan hurrengo sistema lortuko dugu:

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

$$\begin{cases} k_{n-1}a_1^{n-1} + ... + k_1a_1 + k_0 & = & b_1 \\ k_{n-1}a_2^{n-1} + ... + k_1a_2 + k_0 & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n-1}a_n^{n-1} + ... + k_1a_n + k_0 & = & b_n \end{cases}$$

Sistemaren matrizea $\begin{pmatrix} a_1^{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & \cdots & a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & \cdots & a_n & 1 \end{pmatrix}$ da. Matrize hau Vandermonderen determinantea erabiliz kalkula daiteke eta ondorioz , $a_1, ..., a_n$ desberdinak direnez, ez-nulua da. Orduan bateragarri determinatua da eta beraz polinomio bakarra lortuko genuke.

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia