[1]

ARIKETAK

1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ aplikazio lineala non elkartutako matrizea oinarri kanonikoekiko hurrengoa den: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Lor itzazu $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^4$-ren oinarriak non elkartuta matrizea $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erakoa den. Ondorioztatu, P eta Q matrize alderanzgarriak existitzen direla non $PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ den.

EBAZPENA :

Dakigunez $f(x, y, z) = (5x+2y+3z, x-z, -x-2y, x+3y+2z), \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Teorian emandako prozedura jarraituz:

(i) $Kerf$-ren oinarri bat lortu behar dugu. Horretarako hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemaren matrizean oinarrizko aldaketak lerroka eginez hurrengo matrizera iristen gara:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Argi eta garbi sistemaren soluzio bakarra $(0, 0, 0)$ da. Luzatzen dugu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bateraino $\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Bestalde $\{f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\}$ Imf-ren oinarria da. Luzatzen dugu $\mathbb{R}^4$-ren oinarri bateraino $\beta' = \{(5, 1, -1, 1), (2, 0, -2, 3), (3, -1, 0, 2), (1, 0, 0, 0)\}$. Orduan $M_{\beta}^{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} I_3 \\ 0 \end{pmatrix}$ da.

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

A eta $M_{\beta}^{\beta'}(f)$ f-ri elkartutako matrizea denez badakigu $Q = M_{\beta}^{\beta_k}$ eta $P = M_{\beta_k}^{\beta'}$.

2.- Aurkitu $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ matrizeak non PAQ $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erakoa den, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ izanik. Existitzen al dira $P, Q \in GL_3(\mathbb{R})$ non $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ den? eta non $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ den? Baiezko kasuan, aurkitu bi matrizeak.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Ariketaren lehenengo zatia ebazteko aurreko ariketako prozedura erabiliko dugu $f(x, y, z) = (x+2z, -x+y-z, -x+4y+2z) \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ endormorfismo laguntzailea erabiliz, ohartu f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoekiko A dela. Horrela bada, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}$ eta $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ lortzen ditugu non $P_1 A Q_1 = M_{\beta}^{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ den.

Hurrengo galderen erantzuna bilatzeko matrizeen heina lortu behar dugu: $rg(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ eta $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$. Beraz lehenengo kasuan P eta Q ez dira existitzen eta bigarren kasuan bai.

Aurreko ariketan egin dugun bezala, lortzen ditugu $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ eta $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ lortzen ditugu non $P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} Q_2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ den.

Kalkulu guzti hauek egin ondoren $P_1 A Q_1 = P_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} Q_2$ beraz $P = P_2^{-1} P_1$ eta $Q = Q_1 Q_2^{-1}$ matrize alderanzgarriak dira ariketan eskatzen dituen matrizeak.

---

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

3.- Aztertu ondorengo sistema bateragarria denentz eta ebatzi. Adierazi soluzioa soluzio berezi bat eta sistema homogeneoaren soluzio orokoarraren batura moduan.

$$\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$$

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Sistemari elkartutako matrize hedatuan oinarrizko aldaketak lerroka egiten ditugu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beraz $rg(A) = 2 = rg(A|B) = 2$ da, orduan bateragarria da eta indeterminatua, soluzioen multzoa hurrengoa izanik:

$$\{(x, y, 1-3x-4y, 1) \quad | \quad x, y \in \mathbb{R}\} = (0,0,1,1)+\{(x, y, -3x-4y, 0) \quad | \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

.

4.- Izan bitez $\mathbb{R}^4$-ren ondorengo azpiespazioa $W =< (1, 0, -1, 1), (-2, 1, 1, 0) >$ eta $u = (-1, 10, 15, 5)$. Eman 3 ekuazio eta 4 ezezaguneko sistema bat non soluzioen multzoa $u + W$ den.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Lortu behar dira $A \in M_{3\times4}(\mathbb{R})$ eta $B \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ non $AX = B$ ekuazio linealetako sistemaren soluzioen multzoa emandako $u + W$ den. Teoria ikusi genuenez W, berdin du bektoreak lerroka edo zutabeeka idaztea, hurrengo aplikazioaren nukleoa izan behar du:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & M_{4\times1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_{3\times1}(\mathbb{R}) \\ & X & \mapsto & AX \end{array}$$

Asma dezazgun φ aplikazio lineal bat non $Ker\varphi = W$:

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

$$\begin{array}{cccc}
\varphi & : & M_{4\times 1}(\mathbb{R}) & \to & M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \\
 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Orduan $A = M_{\beta_k}^{\beta_k}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ da. B lortzeko $A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ kalkulatu besterik ez dago.

PROBLEMAK

1.- Izan bitez $A, B \in Mat_{m\times n}(K)$. Froga ezazu $rg(A+B) \leq rg(A)+rg(B)$. (Argibidea: Berridatzi aplikazio linealen kasurako).

EBAZPENA :

A eta B matrizeei $f, g \in L(IK^n, IK^m)$ aplikazioak elkartzen dizkiegu non:

$$M_{\beta_k}(f) = A \text{ eta } M_{\beta_k}(g) = B$$

Orduan frogatu beharreko desberdintza honela gelditzen da:

$$rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$$

---

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

5

Ohartu $rg(f+g) = dimIm(f+g) = dim(f+g)(K^n) = dim(f(K^n) + g(K^n)) \leq dimf(K^n) + dimg(K^n)$.

2.- (i) Izan bedi $f \in End(V)$ endomorfismoa non $\mathrm{rg}(f) = 1$ den. Froga ezazu $f^2 \neq 0$ bada, $V = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$ dela. Ondorioztatu existitzen dela β V-ren oinarria non $M_\beta^\beta(f) = A$ den eta A matrizean a_{11} izan ezik beste guztiak nuluak dira.

(ii) Enuntziatu eta frogatu (i) atalaren baliokidea matrizeentzat.

(iii) Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Aurkitu $P \in GL_3(\mathbb{R})$ eta $D \in M_3(\mathbb{R})$ non $d_{ij} = 0\ \forall (i,j) \neq (1,1)$ den eta $A = P^{-1}DP$ izanik.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

(i) Froga dezagun $V = Imf \oplus Kerf$. $rg(f) = 1$ denez $Imf =< f(v_0) >$ modukoa dela $f(v_0) \neq 0$ izanik. Izan bedi $v \in Imf \cap Kerf$ bada orduan, alde batetik $v = \lambda f(v_0)$ moduan idatzi ahal dela eta bestetik $f(v) = 0_V$ da. Orduan $\lambda f^2(v_0) = 0_V$ da. $f^2 \neq 0$ denez orduan $f^2(v_0) \neq 0$ da orduan $\lambda = 0_K$ da eta ondorioz nukleoko bektore bakarra 0_V da. Horrekin batura zuzena dela frogatu dugu. Gainera dimentsioen formula aplikatuz, $dimV = dimKerf + dimImf$ alegia, berdintza osoa lortzen dugu.

Inza bitez β_{Imf} eta β_{Kerf} Imf eta $Kerf$-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan $\beta = \beta_{Imf} \cup \beta_{Kerf}$ V-ren oinarria da eta $M_\beta^\beta(f) = A$ den eta A matrizean a_{11} izan ezik beste guztiak nuluak dira.

(ii) Izan bedi A matrize karratua non $rg(A) = 1$ den. $A^2 \neq 0$ bada orduan existitzen da P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = B$ matrizean b_{11} izan ezik beste guztiak nuluak dira. Frogapena lortzeko A matrizeari f aplikazio lineala elkartzen diogu, K^n, β_k eta $M_{\beta_k}(f) = A$ aukeratuz, orduan lehenengo atalaren arabera, existitzen da β oinarri bat non $M_\beta(f)$ matrizean a_{11} izan ezik beste guztiak nuluak diren. Elkartutako matrizeen arteko lotura erabiliz $P = M_\beta^{\beta_k}$ da.

(iii) Aurrekoaren kasu berezia da, baina P lortzeko $M_{\beta_k}^\beta$ kalkulatu behar dugu.

---

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[6]

3.- Izan bedi $AX = B$ sistema ez homogeneoa eta izan bitez $X_1, ..., X_t$ sistemaren t soluzioak. Aurkitu baldintza beharrezkoa eta nahikoa $X_1, ..., X_t$-ren konbinaketa lineala ere soluzioa izan dadin.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

$\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_t X_t$ $AX = B$ sistemaren soluzioa da baldin eta soilik baldin $A(\lambda_1 X_1 + ... + \lambda_t X_t) = B$ bada b.s.b $\lambda_1 AX_1 + ... + \lambda_t AX_t = B$ b.s.b $\lambda_1 B + ... + \lambda_s B = B$ b.s.b $\lambda_1 + ... + \lambda_s = 1$ bada.

4.- Izan bedi $P \in GL_n(K)$. Froga ezazu P-tik I_n-ra pasa ahal dela transformazio elementalen bidez lerroetan bakarrik edo zutabeetan bakarrik erabiliz. Ondorioztatu P-ren alderantzizkoa kalkulatzeko metodo bat.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Izan bedi $P = (p_{ij})$ matrize aldenranzgarria. Transformazio elementalak herrenkadetan bakarrik erabiliz I_n matrizea lortuko dugu (era berean frogatzen da zutabeetan bakarrik egiten badira). Argi eta garbi, lehenengo zutabeko elementuetako bat ez da nulua (bestela P-ren heina n baino txikiagoa izango zen). Herrenkaden ordena aldatuz (transformazio elementala da) lor dezakegu elementu ez nulu hori matrizearen $(1,1)$ tokian jartzea. Sinplifikatzeko demagun $p_{11} \neq 0$ dela. Orduan hurrengo aldaketak egiten ditugu:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & p'_{12} \cdots & p'_{1n} & \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & p'_{12} & \cdots & p'_{1n} \\ 0 & p'_{22} & \cdots & p'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p'_{n2} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix}$$

Ohartu aldaketak: $P_{(1)} \to 1/p_{11}P_{(1)}$ eta $P_{(i)} \to P_{(i)} - p_{i1}P_{(1)}, i = 2, ..., n$ izan direla hurrenez-hurren.

Bigarren zutabean $p'_{22}, ..., p'_{n2}$ elementuetatik bat gutxienez ezin da nulua izan (bestela matrizearen heina ez zen n izango). Demagun, sinplifikatzeko (bestela herrenkadak trukatuz), $p'_{22} \neq 0$ dela. Orduan hurrengo aldaketak egiten ditugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & p'_{12} & \cdots & p'_{1n} \\ 0 & p'_{22} & \cdots & p'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p'_{n2} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & p'_{12} & \cdots & p'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & p''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p'_{n2} & \cdots & p'_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & p''_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & p''_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p''_{nn} \end{pmatrix}$$

[6]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

7

Ohartu aldaketak: $P_{(2)} \to 1/p'_{22}P_{(1)}$ eta $P_{(i)} \to P_{(i)} - p'_{i2}P_{(2)}, i = 1, 3, ..., n$ izan direla hurrenez-hurren.

Prozedura hori jarraituz azkenean I_n matrizea lortuko genuke.

Erabil dezagun propietate hau P-ren alderantzizkoa kalkulatzen duen metodo bat lortzeko. Izan bedi $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$ lortu behar dugun matrizea beraz $P \cdot X = I_n = X \cdot P$ bete behar du. Orduan, lehenengo berdintzaren ondorioz, hurrengo sistemak ebatzi behar ditugu:

$$P \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., P \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistema bakoitzaren matrize hedatua hurrengoak dira:

$$(P| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}), ..., (P| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$$

Matrize guzti hauek batean jarri ahal dira:

$$(P|I_n)$$

Hasieran frogatu dugunez P matrizean transformazio elementalak, herrenkadetan bakarrik, eginez I_n lor dezakegu beraz aurreko matrizea hurrengoan bihurtzen da:

$$(I_n|P^{-1})$$

Eta hemen dugu matrize alderanzgarri baten alderantzizkoa lortzeko metodo bat, transformazio elementalak erabiliz

[7] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia