[1]

ARIKETAK

1.- Aurkitu, kasu bakoitzean, ezarritako baldintzak betetzen dituen f aplikazio lineal bakarra:$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(1,1,1) = (2,1)$, $f(2,2,1) = (1,1)$, $f(2,1,-1) = (0,3)$.

EBAZPENA :

Izan bedi $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. $\{(1,1,1),(2,2,1),(2,1,-1)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria denez existitzen dira k_1, k_2, k_3 zenbaki errealak non:

$$(x, y, z) = k_1(1,1,1) + k_2(2,2,1) + k_3(2,1,-1)$$

Hemendik hurrengo sistema lortzen dugu:

$$\begin{cases} x &= k_1 + 2k_2 + 2k_3 \\ y &= k_1 + 2k_2 + k_3 \\ z &= k_1 + k_2 - k_3 \end{cases}$$

$k_3 = x - y$, $k_2 = -2x + 3y - z$ eta $k_1 = 3x - 4y + 2z$ balioak lortzen ditugu. Ondorioz:

$$(x, y, z) = (3x - 4y + 2z)(1,1,1) + (-2x + 3y - z)(2,2,1) + (x - y)(2,1,-1)$$

Beraz $f(x, y, z) = f((3x - 4y + 2z)(1,1,1) + (-2x + 3y - z)(2,2,1) + (x - y)(2,1,-1))$ da. f aplikazio lineala denez, $f(x, y, z) = (3x-4y+2z)f(1,1,1)+(-2x + 3y - z)f(2,2,1) + (x - y)f(2,1,-1)$ da. $f(1,1,1) = (2,1)$, $f(2,2,1) = (1,1)$, $f(2,1,-1) = (0,3)$ ordezkapenak eginez hurrengoa lortzen dugu:

$$f(x, y, z) = (3x - 4y + 2z)(2,1) + (-2x + 3y - z)(1,1) + (x - y)(0,3) =$$

$$= (4x - 5y + 3z, 4x - 4y + z).$$

---

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

2.- Aurkitu ezarritako baldintza betetzen dituen f aplikazio lineal bat: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, Imf =< (1,0,-1,0),(1,1,0,0) >$.

$\mathcal{EBAZPENA}:$

f definitzeko nahiko da oinarri bateko bektoreen irudiak zehazten baditugu (aurreko ariketan bezala). Izan bedi $\beta_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri kanonikoa:

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & & e_1 & \mapsto & ? \\ & & e_2 & \mapsto & ? \\ & & e_3 & \mapsto & ? \end{array}$$

Ohartu $f(e_1), f(e_2), f(e_3) \in Imf =< (1,0,-1,0),(1,1,0,0) >$ eta gainera $Imf = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\rangle$ da. Orduan irudiak aukeratzerakoan:

$$\langle f(e_1), f(e_2), f(e_3)\rangle =< (1,0,-1,0),(1,1,0,0) >$$

.

Aukera bat izan daiteke: $f(e_1) = (1,0,-1,0)$, $f(e_2) = (1,1,0,0)$ eta $f(e_3) = (1,0,-1,0) + (1,1,0,0) = (2,1,-1,0)$.

Orduan aurreko baldintza betetzen duen adibeetako bat:

$$f(x,y,z) = (x+y+2z, y+z, -x-z, 0), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

3.- Izan bitez $W_1 = \{(x,y,z) \mid x = z\}$, $W_2 = \{(x,y,z) \mid x-y-z = 0, x-y+z = 0\}$, $U_1 = \{(x,y,z) \mid y = z\}$ eta $U_2 = \{(x,y,z) \mid x = y = 0\}$ $\mathbb{R}^3$ espazioko azpiespazioak. Aurkitu $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ non $f(W_1) = U_1$ eta $f(W_2) = U_2$ betetzen den.

$\mathcal{EBAZPENA}:$

Aplikazio lineala lortzeko berriro ere oinarrien bitartez egingo dugu. Argi eta garbi: $W_1 =< (1,0,1),(0,1,0) >$, $W_2 =< (1,1,0) >$, $U_1 =< (1,0,0),(0,1,1) >$ eta $U_2 =< (0,0,1) >$. Orduan hasierako baldintzak horrela gelditzen dira:

$$f(< (1,0,1),(0,1,0) >) =< (1,0,0),(0,1,1) >, f(< (1,1,0) >) =< (0,0,1) >$$

Orduan aukera bat izan daiteke: $f(1,0,1) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,1,1)$ eta $f(1,1,0) = (0,0,1)$. Datu hauekin f guztiz definiturik dago $\{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria baita.

---

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

4.- Izan bedi $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ non $v_1 = (1,0,-1), v_2 = (1,1,1)$ eta $v_3 = (1,1,0)$ diren $\mathbb{R}^3$ espazioaren oinarria. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

(i) Kalkulatu $f(1,-1,2)$ eta $f^2(0,1,-1)$.

(ii) Lortu f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko.

(iii) Kalkulatu $f(x,y,z)$.

(iv) Aurkitu $Kerf$ eta Imf azpiespazioen oinarriak.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

(i) $f(1,-1,2) = (v_1v_2v_3)M_\beta^\beta(f)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non $(1,-1,2) = (xyz)_\beta$ den. Lor ditzagun x, y eta z-ren balioak:

$$\begin{cases} 1 = x+y+z \\ -1 = y+z \\ 2 = -x+y \end{cases}$$

Beraz $x = 2, y = 4$ eta $z = -5$ dira. Orduan:

$$f(1,-1,2) = (v_1v_2v_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = (v_1v_2v_3)\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ -40 \end{pmatrix} =$$

$= (-20, -35, -10)$.

Bestalde $f^2(0,1,-1) = (v_1v_2v_3)M_\beta^\beta(f^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ non $(0,1,-1) = (xyz)_\beta$ den.

Dakigunez $M_\beta^\beta(f^2) = (M_\beta^\beta(f))^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -1 \\ 7 & 14 & 30 \\ -11 & 2 & 31 \end{pmatrix}$ da. Bestalde $(0,1,-1) = (-1 - 23)_\beta$ da.

(ii) f-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoak lortzeko bi modu ditugu: bata definizioa erabiliz eta bestea elkartutako matrizeen arteko erlazioa erabiliz. Guk hemen bigarren aukera erabiliko dugu:

---

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

$$M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = M_{\beta}^{\beta_k} M_{\beta}^{\beta}(f) M_{\beta_k}^{\beta}$$

Erraz kalkulatzen da: $(x, y, z) = ((x-y)(x-y) + z - x + 2y - z)_\beta$. Beraz:

$$M_{\beta_k}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ eta } M_{\beta}^{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan:

$$M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 & -4 \\ -6 & 15 & -7 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Aurreko atala erabiliz:

$$f(x, y, z) = (-2x + 10y - 4z, -6y + 15y - 7z, -x + 5y - 2z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(iv) $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$ da. Beraz $M_{\beta}^{\beta}(f)$ matrizea erabiliz hurrengo sistema homogeneoa ebatzi behar dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Emaitza: $c = 0$ eta $a = -2b$. Ohartu $(x, y, z) = (abc)_\beta = (-2bb0)_\beta$ dela. Beraz $(x, y, z) = (-2b)(1, 0, -1) + b(1, 1, 1) = (-b, b, 3b), \forall b \in \mathbb{R}$. Orduan $Kerf =< (-1, 1, 3) >$ da eta $\{(-1, 1, 3)\}$ oinarri bat izanik.

Kalkula dezagun Imf-ren oinarri bat orain. Dakigunez $Imf =< f(e_1), f(e_2), f(e_3) >=< (-2, -6, -1), (10, 15, 5), (-4, -7, -2) >$ da eta $dimImf = dim\mathbb{R}^3 - dimKerf = 2$ da. Beraz $\{(-2, -6, -1), (10, 15, 5)\}$ oinarri bat da.

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

5

PROBLEMAK

1.- (i) Izan bedi $A \in Mat_n(K)$. Froga ezazu $A^2 = A$ dela baldin eta soilik baldin existitzen bada $P \in GL_n(K)$ non $A = P^{-1}DP$ den, $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ izanik.

(ii) Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Berehala egiaztatzen da $A^2 = A$ dela. Aurkitu (i) atala betetzen duten P eta D matrizeak.

EBAZPENA :

$\Leftarrow$. Demagun P matrize alderanzgarria existitzen dela non $A = P^{-1}DP$ den $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ izanik. Orduan $A^2 = P^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}D^2P$ da eta argi eta garbi, $D^2 = D$ beraz $A^2 = P^{-1}DP = A$ da.

$\Rightarrow$ Izan bedi $f \in L(K^n, K^n)$ non $M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = A$ den. Orduan $A^2 = A$ denez $f^2 = f$ da. Froga dezagun hurrengo berdintza:

$$V = Imf \oplus Kerf$$

Alde batetik $v \in Imf \cap Kerf$ bada orduan: $v = f(w)$ eta $f(v) = 0$. Beraz $f^2(w) = O$, baina $f^2 = f$ denez $f(w)$ ere 0 da, hau da, $v = 0$. Beraz azpiespazio hauen batura zuzena da.

Bestetik $dimV = dimKerf + dimImf$ denez eta batura zuzena izateagatik berdintza lortzen dugu.

Orduan β_{Imf} eta β_{Kerf} Imf eta $Kerf$-ren oinarriak badira hurrenez-hurren $\beta_{Imf} \cup \beta_{Kerf} = \beta$ V-ren oinarria eta $M_\beta^\beta(f) = D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ohartu $A = M_{\beta_k}^{\beta_k}(f)$ dela. Orduan A eta D f-ri elkartutako bi matrizeak dira eta ondorioz erlazionatuta daude:

$$M_\beta^{\beta_k} D M_{\beta_k}^\beta = A$$

Hau da $P = M_{\beta_k}^\beta$ da.

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[6]

(ii) Aurreko ataleko prozedura aplikatu: lehenengo $\beta = \beta_{Imf} \cup \beta_{Kerf}$ oinarri lortu eta ondoren $P = M^{\beta}_{\beta_k}$.

2.- Izan bitez V $\mathbb{R}$ bektore espazioa eta $f \in End(V)$. V-ren ondorengo azpimultzoak definitzen ditugu:

$$V^+ = \{v \in V \mid f(v) = v\} \quad \text{y} \quad V^- = \{v \in V \mid f(v) = -v\}.$$

(i) Froga ezazu V^+ eta V^- V-ren azpiespazioak direla eta $V^+ \cap V^- = \{0_V\}$ dela.

(ii) Froga ezazu V^+ eta V^- betegarriak direla baldin eta soilik baldin $f^2 = 1_V$ bada.

(iii) Froga ezazu $f^2 = 1_V$ dela baldin eta soilik baldin existitzen bada V-ren oinarri bat non f-ri elkartutako matrizea diagonala den, diagonaleko elementuak 1 edo -1 izanik.

(iv) Ondorioztatu, $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ bada orduan $A^2 = I_n$ dela baldin eta soilik baldin existitzen badira $P \in GL_n(\mathbb{R})$ eta D matrize diagonala, diagonaleko elementuak 1 eta -1 izanik, non $A = P^{-1}DP$ den.

(v) Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Kalkulatu aurreko atala betetzen duten P eta D matrizeak.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

(i) Erraz frogatzen dira V^+ eta V^- azpiespazioak direla. Bestalde $v \in V^+ \cap V^-$ bada orduan $v = f(v) = -v$. Hau da $v = 0$.

(ii) $\Rightarrow$. Demagun betegarriak direla eta froga dezagun $f^2(v) = v, \forall v \in V$. Betegarriak direnez $v = u + w$ moduan adierazi ahal da non $u \in V^+$ eta $w \in V^-$ den. Orduan $f(v) = f(u + w) = f(u) + f(w) = u - w$, beraz $f^2(v) = f(f(v)) = f(u - w) = f(u) - f(w) = u + w = v$ da.

$\Leftarrow$. Demagun $f^2 = 1_V$ dela eta ikus dezagun V^+ eta V^- betegarriak direla. Aurreko atalean frogatu dugu batura zuzena dela beraz frogatu behar dugu batura hori V osoa dela. Izan bedi $v \in V$ orduan aurkitu behar ditu $u \in V^+$ eta $w \in V^-$ non $v = u + w$ den. Aurreko berdintzari f aplikatuz $f(v) = u - w$ lortzen dugu. Beraz hurrengo sistema dugu:

---

[6]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

7

$$\begin{cases} v &= u+w \\ f(v) &= u-w \end{cases}$$

Argi eta garbi $u = (v + f(v)/2 \in V^+$ eta $w = (v - f(v)/2 \in V^-$.

(iii) $\Leftarrow$. Demagun β oinarri bat dugula non $M_\beta^\beta(f)$ diagonala den diagonaleko elementuak 1 edo -1 izanik. Orduan $M_\beta^\beta(f^2) = (M_\beta^\beta(f))^2 = I_n$ denez $f^2 = 1_V$ da.

$\Rightarrow$. Demagun $f^2 = 1_V$ dela. Orduan aurreko atala erabiliz, β_{V^+} eta β_{V^-} V^+ eta V^-en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan $\beta = \beta_{V^+} \cap \beta_{V^-}$ V-ren oinarri bat da non elkartutako matrizea diagonala den diagonaleko elementuak 1 edo -1 izanik.

(iv) $\Leftarrow$. Demagun P matrize alderanzgarria eta D matrize diagonala, diagonaleko elementuak 1 eta -1 izanik, existitzen direla non $A = P^{-1}DP$ den. Orduan $A^2 = P^{-1}DPP^{-1}DP = P^{-1}D^2P = P^{-1}I_nP = I_n$ da.

$\Rightarrow$. Demagun $A^2 = I_n$ dela. A matrizeari f aplikazio lineal bat elkartzen diogu hurrengo datuekin: $f \in L(K^n, K^n)$ eta $M_{\beta_k}^{\beta_k}(f) = A$ da. Orduan $f^2 = 1_{K^n}$ da eta aurreko atala erabiliz aurkitu ahal da β (gainera oinarri hau lortzeko metodoa ematen digu) non $M_\beta^\beta(f) = D$ diagonala den diagonaleko elementuak 1 edo/eta -1 izanik. Orain A eta D aplikazio berdinari elkartutako bi matrizeak dira. Orduan:

$$M_\beta^{\beta_k} D M_{\beta_k}^\beta = A$$

Beraz $P = M_{\beta_k}^\beta$ matrizea da.

(iv) Aurreko ataleko kasu berezia baino ez da.

---

[7] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia