[1]

ARIKETAK

1.- Froga ezazu $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, |x-y-2z=0\}$ eta $W = \langle(-3,1,0),(0,0,1)\rangle$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioak direla eta aurkitu $U, W, U \cap W$ eta $U+W$ azpiespazioen oinarri bat eta dimentsioa.

EBAZPENA :

$\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^3$ denez orduan azpiespazioa dela frogatzeko hurrengo baldintzak konprobatu behar ditugu:

(i) $u_1 + u_2 \in U, \forall u_1, u_2 \in U$.

(ii) $ku \in U, \forall u \in U \forall k \in K$.

(i) frogatuko dugu, (ii) era berean konprobatzen da. Izan bitez $u_1 = (x_1, y_1, z_1), u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ Uko bi bektoreak beraz: $x_1 - y_1 - 2z_1 = 0$ eta $x_2 - y_2 - 2z_2 = 0$. Orduan $u_1 + u_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ denez ikus dezagun ekuazioa betetzen duen ala ez:

$$x_1 + x_2 - y_1 - y_2 - 2z_1 - 2z_2 = x_1 - y_1 - 2z_1 + x_2 - y_2 - 2z_2 = 0 + 0$$

$W = \langle(-3,1,0),(0,0,1)\rangle$ denez zuzenean ikusten da azpiespazioa dela.

Kalkula dezagun orain U-ren oinarri bat, ohartu $x - y - 2z = 0$ ekuaziotik $x = y + 2z$ lortzen dugula, beraz $U = \{(y+2z, y, z) \quad | \quad y, z \in \mathbb{R}\}$ da eta $\beta_U = \{(1,1,0),(2,0,1)\}$ sistema sortzailea izateaz gain oinarri bat ere bada.

Zuzenean ikusten da $\beta_W = \{(-3,1,0),(0,0,1)\}$ W-ren oinarri bat ere dela.

$U \cap W$-ren oinarri bat kalkulatzeko W-ren ekuazio inplizitua lortuko dugu: $x + 3y = 0$. Horrela:

$$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y - 2z = 0, x + 3y = 0\}$$

Sistema homogeneoaren soluzioen multzoa $\{(-3y, y, -2y) \quad | \quad y \in \mathbb{R}\}$ da. Beraz $U \cap W$-ren oinarri bat $\{(-3,1,-2)\}$ multzoa da.

Dakigunez $U + W$-ren sistema sortzaile bat:

$$\beta_U \cup \beta_W = \{(1,1,0),(2,0,1),(-3,1,0),(0,0,1)\}$$

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Dimentsioen formularen arabera $dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W) = 2+2-1 = 3$ izango da. Gainera $(1,1,0) = 2(2,0,1)+(-3,1,0)-2(0,0,1)$ denez $\{(2,0,1),(-3,1,0),(0,0,1)\}$ baturaren oinarri da.

2.- Aurki ezazu $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z = 0, 2x+iy-z = 0\}$ $\mathbb{C}^3$-ren azpiespazioaren betegarri bat.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Lehenengo pausuan W-ren oinarri bat lortu behar dugu horretarako hurrengo sistema ebatzi behar dugu:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x+iy-z & = & 0 \end{array} \right.$$

Sistemaren soluzioen multzoa $\{(-(1+i)y/3, y, -(2+i)y/3) \quad | \quad y \in \mathbb{C}\}$ da. Orduan W-ren oinarri bat $\{(1+i,-3,2+i)\}$ da.

Hurrenengo pausuan luzatzen dugu oinarri hori $\mathbb{C}^3$-ren oinarri bateraino. Adibidez, $\{(1+i,-2,2+i),(1,0,0),(0,1,0)\}$ lor daiteke.

Orduan W-ren betegarri bat $U = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$ da.

3.- Izan bitez $\mathbb{R}^3$-ren oinarriak, $\beta = \{u_1,u_2,u_3\}$ eta $\beta' = \{v_1,v_2,v_3\}$ non $u_1 = (1,1,-1), u_2 = (0,-1,2), u_3 = (2,0,1), v_1 = (1,0,-1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,1,1)$.

(i) Kalkulatu oinarri aldaketaren matrizeak β-tik β'-ra eta β'-tik β-ra. Egiaztatu matrize bakoitza bestearen alderantzizkoa dela.

(ii) Kalkulatu $(1,2,1)$-en koordenatuak oinarri bakoitzeko eta egiaztatu betetzen duten erlazioa.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

$M_\beta^{\beta'}$ matrizearen zutabeetan $(1,1,-1),(0,-1,2)$ eta $(2,0,1)$ bektoreen koordenatuan β' oinarrian idatzi behar ditugu. (x,y,z) bektore orokor baten koordenatuak lortuko ditugu β' oinarrian hurrengo ekuaziotik:

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(0,1,1)$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Hurrengo sistema dugu:

$$\begin{cases} x &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ y &= \lambda_3 \\ z &= -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

Sistemaren soluzioa $((x+y-z)/2, (x-y+z)/2, y)$ da.

Beraz:

$$M_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Era berean lortzen da $M_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Argi eta garbi matrize bat bestearen alderantzizkoa da.

(ii) (x,y,z) betorearen koordenatuak: $((x+y-z)/2 \quad (x-y+z)/2 \quad y)_{\beta'}$ eta $(-x+4y+2z \quad -x+3y+2z \quad x-2y-z)_{\beta}$ dira. Beraz $(1,2,1)$ kasuan: $(1 \quad 0 \quad 2)_{\beta'}$ eta $(9 \quad 7 \quad -4)_{\beta}$ dira. Ikusten denez:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

PROBLEMAK

1.- Izan bitez V eta V' K gaineko bektore-espazioak.

(i) Eman $V \times V'$ multzoari bektore-espazioaren egitura.

(ii) Frogatu $W \leq V$ eta $W' \leq V'$ badira orduan $W \times W' \leq V \times V'$ dela. Egia al da $V \times V'$-ren azpiespazio guztiak $W \times W'$ erakoak direla?

(iii) Demagun V eta V' dimentsio finitukoak direla eta izan bitez $\{v_1, ..., v_n\}$ eta $\{v'_1, ..., v'_m\}$ V eta V'-en oinarriak hurrenez-hurren. Lortu oinarri horiekin $V \times V'$-en oinarri bat eta ondorioztatu $dim(V \times V')$, $dimV$ eta $dimV'$-en arteko erlazioa.

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

(iv) Orokortu aurreko atalak $V_1, ..., V_n$ bektore-espazioen biderkadura kartesiarrerako.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

(i) $V \times V^{'}$ multzoa hurrengo eragiketa eta kanpoko biderketa definitzen ditugu:

1. Eragiketa: $(v_1, v_1^{'})+(v_2, v_2^{'}) = (v_1+v_2, v_1^{'}+v_2^{'}) \in V \times V^{'}, \forall (v_1, v_2), (v_1^{'}, v_2^{'}) \in V \times V^{'}$. (Ohartuko V eta $V^{'}$ K-espazio bektorialen batuketak erabili ditugula lehenengo eta bigarren osagaiak batzeko hurrenez-hurren)

2.- Kanpoko Biderketa: $k(v, v^{'}) = (kv, kv^{'}) \in V \times V^{'}, \forall k \in K, \forall (v, v^{'}) \in V \times V^{'}$. (Ohartuko V eta $V^{'}$ K-espazio bektorialen kanopoko biderketak erabili ditugula lehenengo eta bigarren osagaiak batzeko hurrenez-hurren)

Erraz konprobatzen dira espazio bektoriala izateko bete behar dituen propietate guztiak.

(ii) $\emptyset \neq W \times W^{'} \leq V \times V^{'}$ betetzen denez orduan azpiespazioa izateko hurrengo baldintzak konprobatu behar dira:

1.- $\forall (w_1, w_1^{'}), (w_2, w_2^{'}) \in W \times W^{'}$ orduan $(w_1, w_1^{'}) + (w_2, w_2^{'}) \in W \times W^{'}$ betetzen al da? Ohartu $(w_1, w_1^{'}) + (w_2, w_2^{'}) = (w_1 + w_1^{'}, w_2 + w_2^{'}) \in W \times W^{'}$ betetzen dela $w_1, w_1^{'} \in W \leq V$ (eta beraz $w_1+w_1^{'} \in W$) eta $w_2, w_2^{'} \in W^{'} \leq V^{'}$ (eta beraz $w_2 + w_2^{'} \in W^{'}$) betetzen direlako. 2.- $\forall k \in K, \forall (v, v^{'}) \in V \times V^{'}$ orduan $k(v, v^{'}) \in W \times W^{'}$ betetzen al da? Era berean arrazoitzen .

Galderaren erantzuna ezezkoa da zeren adibidez $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad x = y\}$ azpiespazioa da baina ezin da $\mathbb{R}$-ko bi azpiespazioen biderkadura kartesiar moduan adierazi.

(iii) $\{v_1, ..., v_n\}$ eta $\{v^{'}{}_1, ..., v^{'}{}_m\}$ V eta $V^{'}$-en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan $\forall (v, v^{'}) \in V \times V^{'}$: $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ eta $v^{'} = b_1v_1^{'} + ... + b_mv_m^{'}$ moduan adierazi ahal dira beraz:

$$(v, v^{'}) = a_1(v_1, 0_{V^{'}}) + ... + a_n(v_n, 0_{V^{'}}) + b_1(0_V, v_1^{'}) + ... + b_m(0_V, v_m^{'})$$

Beraz $\{(v_1, 0_{V^{'}}), ..., (v_n, 0_{V^{'}}), (0_V, v_1^{'}), ..., (0_V, v_m^{'})\}$ $V \times V^{'}$ espazioaren sistema sortzailea da. Sistema askea dela frogatzeko definizioa eta $\{v_1, ..., v_n\}$ eta $\{v^{'}{}_1, ..., v^{'}{}_m\}$ oinarriak direla erabiliz berehala lortzen dugu.

Orduan $dim(V \times V^{'}) = dimV + dimV^{'}$ da.

---

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

5[5]

2.- Izan bedi $X = \{x_1, ..., x_m\}$ multzo finitua. $i = 1, ..., m$ bakoitsarentzat, $f_i \in \mathcal{F}(X, K)$ aplikazioa honela definitzen dugu:

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i \text{ bada ;} \\ 0, & x \neq x_i \text{ bada.} \end{cases}$$

Froga ezazu $\beta = \{f_1, ..., f_m\}$ $\mathcal{F}(X, K)$ K gaineko bektore-espazioaren oinarria dela. Beraz, $dim\mathcal{F}(X, K) = m = |X|$. Zeintzuk dira $f \in \mathcal{F}(X, K)$ elementu baten koordenatuak β oinarriarekiko?

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Froga dezagun lehenengo sistema askea dela. Horretarako hurrengo inplikazioa frogatu behar dugu:

$$a_1 f_1 + ... + a_m f_m = 0 \Rightarrow a_1 = ... = a_m = 0_K$$

$a_1 f_1 + ... + a_m f_m = 0$ berdintzan $x = x_1, ..., x_m$ ordezkapenak egiten baditugu hurrengo sistema lortzen dugu:

$$\begin{cases} a_1 f_1(x_1) + ... + a_m f_m(x_1) & = & 0_K \\ a_1 f_1(x_2) + ... + a_m f_m(x_2) & = & 0_K \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 f_1(x_m) + ... + a_m f_m(x_m) & = & 0_K \end{cases}$$

Orain f_i-ren definizioagatik aurreko ekuazioak hauek dira: $a_1 = 0_K, ..., a_m = 0_K$.

Sistema sortzailea dela frogatzeko edozein $f \in \mathcal{F}(X, K)$ aurkitu behar ditut $b_1, ..., b_m \in K$ non:

$$f = b_1 f_1 + ... + b_m f_m$$

$x = x_1, ...x_m$ ordezkapenak eginez lortzen dugu: $b_1 = f(x_1)$,...,$b_m = f(x_m)$.

Beraz $dim\mathcal{F}(X, K) = m$ da.

---

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

6

3.- Izan bitez $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$ eta $W = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$. Froga ezazu $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = U \oplus W$ dela.

$\mathcal{EBAZPENA}$:

Lehenengo batura zuzena dela frogatuko dugu. Izan bedi $f \in U \cap W$. Orduan:

$$-f(x) = f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

hau da $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Batura zuzena $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ dela frogatzeko nahiko da $\forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ aurkitzea $F \in U$ eta $G \in W$ non $f = F + G$ den. Ohartu aurreko berdintzetatik:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & = & F(x) + G(X) \\ f(-x) & = & F(x) - G(x) \end{array} \right.$$

Beraz $F(x) = (f(x) + f(-x))/2$ eta $G(x) = (f(x) - f(-x))/2$. Argi eta garbi, bata bakoitia eta bestea bikotia da.

---

[6]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia