[1]

## *ARIKETAK*

1.- Izan bitez $f : A \to B$ eta $g : B \to A$ aplikazioak. Froga ezazu $g \circ f = 1_A$ bada orduan $f$ injektiboa eta $g$ suprajektiboa da.

---

*EBAZPENA* :

Froga dezagun $f$ injektiboa dela. Demagun $a, a' \in A$ ditugula non $f(a) = f(a')$ betetzen den. Orduan $g$ aplikatuz, $g(f(a)) = g(f(a'))$ berdintza dugu. Ohartu $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a'$ dugula baina $g \circ f = 1_A$ denez $a = a'$ da.

Ikus dezagun orain $g$ suprajektiboa dela. Horretarako ikusi behar dugu $\forall a \in A$ existitzen dela $b \in B$ non $g(b) = a$ den. $a \in A$ eta $(g \circ f) = 1_A$ denez orduan $g(f(a)) = a$ da beraz aurkitu dugu $a$-ren aurreirudi bat $g$ aplikazioarekin: $f(a)$ alegia.

---

2.- Zehaztu $[0, 1]$ multzoa biderkaketarekin talde egitura duen ala ez.

---

*EBAZPENA* :

Lehenengo ohartu $x, y \in [0, 1]$ badira orduan $xy \in [0, 1]$ dela. Hau da biderketa eragiketa bat da multzo horretan. Taldea izateko hiru propietate bete behar ditu:

(i) Propietate elkarkorra: $x(yz) = (xy)z, \forall x, y, z \in [0, 1]$. Ohartu $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ eta $\mathbb{R}$-n biderkadurak propietate elkarkorra betetzen denez $[0, 1]$ azpimultzoa ere betetzen da.

(ii) Elementu neutroa du. Badakigu $\mathbb{R}$-n biderketarekiko elementu neutroa 1 dela eta $1 \in [0, 1]$ dagoenez orduan elementu neutroa dugu gure multzoan.

(ii) Elementu guztiek alderantzizkoa dute. $0 \in [0, 1]$ elementuarentzat ezin dugu aurkitu $a \in [0, 1]$ non $0 \cdot a = 1 = a \cdot 0$ betetzen duen $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ baita beti.

Beraz ez da taldea.

---

3.- Froga ezazu $x^4 + 4$ $\mathbb{Q}$ gainean ez duela errorik eta $\mathbb{Z}$ gaineko bigarren mailako bi polinomioen biderkadura moduan adierazi ahal dela.

---

*EBAZPENA* :

Gogoratu koefizienteak $\mathbb{Z}$-n dituen polinomio baten erro arrazional posibleak $a/b$ modukoak direla non: $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $(a, b) = 1$, $a$ polinomioaren

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

gai askea zatitu behar dut eta $b$ polinomioaren koefiziente zuzendaria. Orduan $x^4+4$ polinomioaren kasuan erro arrazional posibleak: $1, -1, 2, -2, 4, -4$ dira. Polinomioan ordezkatuz ikusten da ez direla erroak beraz ez du erro arrazionalik.

Bigarren partea frogatzeko idatz dezagun $x^4+4 = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ moduan $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ izanik. Lor ditzagun ezezagun horiek. Maila berbereko monomioen koefizienteak berdinduz hurrengo ekuazioak lortzen ditugu:

$$\begin{cases} 0 & = & c+a \\ 0 & = & b+ac+d \\ 0 & = & ad+bc \\ 4 & = & bd \end{cases}$$

$b = d = 2$ eta $a = 2, c = -2$ ekuazio guztiak betetzen dituzte. Beraz:

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

---

4.-(i) Izan bedi $f(x) \in K[x]$ eta $t \in K$. Zer erlazio dago $f(x)$ eta $g(x) = f(x+t)$ polinomioen erroen artean? Ondorioztatu $f(x)$ erro anizkoitzak dituela baldin eta soilik baldin $g(x)$ polinomioak erro anizkoitzak baditu.

(ii) Izan bedi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ $K$ gaineko polinomioa. Froga ezazu $t \in K$ existitzen dela non $g(x) = f(x+t)$ era honetakoa den $g(x) = x^3+px+q$.

---

$\mathcal{EBAZPENA}$ :

(i) $a$ $f$ ren erroa bada orduan $f(a) = 0$ da eta beraz $f(a-t+t) = 0$ da. Hau da $a-t$ $f(x+t)$ polinomioaren erroa da. Alderantziz $b$ $f(x+t)$ polinomioaren erroa bada orduan $f(b+t) = 0$ da eta beraz $b+t$ $f$-ren erroa da.

$a$ $f$-ren erro anizkoitza bada orduan $f(a) = f'(a) = 0$ da. Beraz $a-t$ $f$-ren erroa da eta $(f(x+t))' = f'(x+t)$ denez $(f(x+t))'$-ren erroa ere bada hau da $a-t$ ere erro anizkoitza da. Beste inplikazioa era berean frogatzen da.

(ii) $f(x+t) = (x+t)^3 + a(x+t)^2 + b(x+t) + c = x^3 + 3x^2t + 3xt^2 + t^3 + ax^2 + 2axt + at^2 + bx + bt + c$ polinomioa $x^3 + px + q$ modukoa izateko nahikoa da $3t + a = 0$ lortzea ($3t + a$ $x^2$-ren koefizientea da) eta horretarako $t = -a/3$ balioarekin lortzen da.

---

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

## *PROBLEMAK*

1.-Izan bedi $A = \mathbb{Z}$ eta $n \in \mathbb{N}$. Multzo honetan ondorengo erlazioa definitzen dugu:

$$a \sim_n b \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z} \ \text{ non } \ a - b = n\lambda \ \text{ den.}$$

Froga ezazu baldiokidetasun erlazioa dela, kalkula ezazu baliokidetasun-klasea eta zatidura multzoa:

---

*EBAZPENA* :

Baliokidetasun erlazioa izateko hiru propietate bete behar ditu:

(i) Erreflexiboa: $a \sim_n a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Hau argi eta garbi betetzen da $a - a = 0$ $n$-ren multiploa baita.

(ii) Simetrikoa: $a \sim_n b$ bada orduan $b \sim_n a$. $a \sim_n b$ betetzen denez $a - b = \lambda n$ moduan idatzi ahal dugu beraz $b - a = -(a - b) = (-\lambda)n$ moduan idatz dezakegu.

(iii) Iragankorra. $a \sim_n b$ eta $b \sim_n c$ orduan $a \sim_n c$ da. Hipotesiengatik $a - b = \lambda_1 n$ eta $b - c = \lambda_2 n$ moduan idatzi ahal dira beraz $a - c = (a - b) + (b - c) = (\lambda_1 + \lambda_2)n$ moduan idatzi ahal da.

Adibidez $n = 3$ bada, $\sim_3$ erlazioa:

$$a \sim_3 b \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z} \ \text{ non } \ a - b = 3\lambda \ \text{ den.}$$

baliokidetasun klaseak kalkulatzen baditugu:

$$\overline{0} = \{z \in \mathbb{Z} \ | \ 0 \sim_3 z\} = \{z \in \mathbb{Z} \ | \ \exists \lambda \in \mathbb{Z}, 0 - z = 3\lambda\} = \{3m \ | \ m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{1} = \{z \in \mathbb{Z} \ | \ 1 \sim_3 z\} = \{z \in \mathbb{Z} \ | \ \exists \lambda \in \mathbb{Z}, 1 - z = 3\lambda\} = \{1 + 3m \ | \ m \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{2} = \{z \in \mathbb{Z} \ | \ 2 \sim_3 z\} = \{z \in \mathbb{Z} \ | \ \exists \lambda \in \mathbb{Z}, 2 - z = 3\lambda\} = \{2 + 3m \ | \ m \in \mathbb{Z}\}$$

---

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

Gainera aurrekoak dira dauden baliokidetasun klase desberdin guztiak, zeren:

$\overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \overline{1+3z}, \quad z \in \mathbb{Z}.$

$\overline{2} = \overline{5} = \overline{8} = \overline{2+3z}, \quad z \in \mathbb{Z}.$

$\overline{3} = \overline{0} = \overline{9} = \overline{3+3z}, \quad z \in \mathbb{Z}.$

Beraz $n = 3$ denean zatidura multzoa:

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{\overline{a} \ \mid \ a \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

Multzo hau $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ moduan adierazten da.

$n = 3$ kasuan egin dugun bezala orokorrean egin daiteke.

$k \in \mathbb{Z}$ bakoitzarentzat:

$$\overline{k} = \{k + nz \ \mid \ z \in \mathbb{Z}\}$$

Zatidura multzoa kalkulatzerakoan ohartu $\overline{a}$ klasea badugu, zatiketaren algoritmoa erabiliz, existitzen dira $q, r$ non: $a = qn + r$ eta $0 \leq r \leq n-1$ betetzen den. Orduan $\overline{a} = \overline{r}$ da. Bestalde $\overline{r} = \overline{r'}$ badira, $0 \leq r, r' \leq n-1$ izanik, orduan $r - r'$ $n$-ren multiploa izango zen baina zenbaki horia $1-n$ eta $n-1$ bitarteantean dagoenez, aukera bakarra 0 izatea da. Beraz:

$$\overline{\mathbb{Z}} = \{\overline{z} \ \mid \ z \in \mathbb{Z}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\}.$$

Multzo hau adierazteko $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ idazten da.

---

2.- Froga ezazu $\mathbb{R}$ gainean ez direla existitzen maila 3 baino handiagoa edo berdina duten polinomio irreduzibleak.

---

*EBAZPENA* :

Izan bedi $f$ $\mathbb{R}$ gaineko polinomioa non maila 3 baino handiagoa edo berdina den. Aljebraren oinarrizko teoremaren arabera badakigu $f$-ren erroak konplexuak direla. Izan bedi $a \in \mathbb{C}$ $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ polinomioaren erroa, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$ , orduan $f(\overline{a})$, konjokatuaren propietateak erabiliz eta kontuan izanda koefizienteak zenbaki errealak direla, $\overline{f(a)}$-ren berdina da, hau da, $\overline{a}$ ere $f$-ren erroa da. Orduan $(x-a)(x-\overline{a}) = x^2 - (a+\overline{a})x + a\overline{a} \in \mathbb{R}[x]$ $f$ polinomioa zatitzen du. Beraz existitzen da $h \in \mathbb{R}[x]$ non:

$$f(x) = (x^2 - (a+\overline{a})x + a\overline{a})h(x)$$

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

Gogoratu $f$-ren maila hiru baino handiagoa edo berdina dela beraz $h$-ren maila 1 baino handiagoa edo berdina da. Ondorioz $f(x)$ ez da polinomio irreduziblea.

3.-(i) Izan bedi $f(x) = x^3 + px + q$. Froga ezazu $f(x)$ erro anizkoiren bat duela baldin eta soilik baldin $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$ bada.

(ii) Zein da $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinomioak bete behar duen baldintza erro anizkoitzak eduki ditzan?

---

$\mathcal{EBAZPENA}$ :

(i) $\Leftarrow$. Izan bedi $a$ $f$ polinomioaren erro anizkoitza. Orduan $f(a) = 0 = f'(a)$ da. $f'(a) = 3a^2 + p = 0$ denez $p = -3a^2$ da. Gainera $f(a) = a^3 + pa + q = 0$ denez ere $q = -a^3 + 3a^3 = 2a^3$ da. Orduan $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -\frac{27a^6}{27} + \frac{4a^6}{4} = 0$ da.

$\Rightarrow$. Demagun $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = 0$ betetzen dela. Aurki dezagun $f$-ren erro anizkoitz bat. $f'(x) = 3x^2 + p = 0$ ekuaziotik $x^2 = -p/3$ lortzen dugu. Har dezagun $x = \sqrt{-p/3}$. Orduan $f(x) = 0$ ekuazioan ordezkatuz $-p/3\sqrt{-p/3} + p\sqrt{-p/3} + q$ lortzen dugu eta azken berdintza hau zero da baldin eta soilik baldin:

$$2p/3\sqrt{-p/3} = -q$$

Karratua jasoz, hori betetzen da baldin eta soilik baldin $4p^2/9(-p/3) = q^2$ hau da, baldin eta soilik baldin $-p^3/27 = q^2/4$ eta hau hipotesia da.

---

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia