6. Gaia 6

Endomorfismo eta Matrize Diagonalgarriak

[1]

1.- ENDOMORFISMOEN KASUA

Definizioa 6.0.1. *Izan bedi $f \in End(V)$. f* **diagonalgarria** *dela esango dugu baldin eta existitzen bada β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f)$ matrize diagonala den.*

Teorema 6.0.2. *Izan bedi $f \in End(V)$. Orduan f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen badira:*

- *(i) $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean daude.*
- *(ii) λ f-ren balio propio bakoitzarentzat:*

$$dimV(\lambda) = m(\lambda)$$

Frogapena 6.0.3. $\Rightarrow$. *Demagun f diagonalgarria dela beraz existitzen da $\beta = \{v_{11}, ..., v_{1t_1}, ..., v_{s1}, ..., v_{st_s}\}$ non:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Orduan $\chi_f(x) = \chi_{M_\beta(f)}(x) = (x-\lambda_1)^{t_1}\cdots(x-\lambda_s)^{t_s}$. *Beraz polinomioaren erroak* $\lambda_1, ..., \lambda_s$ K *gainean daude eta (i) betetzen da.*

Bestalde, β *oinarriko* $\{v_{i1}, ..., v_{it_i}\}$ *multzo askea* $V(\lambda_i)$ *azpiespazioan dago. Ondorioz* $t_i \leq dimV(\lambda_i)$. *Teorema batean ikusi genuen* $dimV(\lambda_i) \leq m(\lambda_i) = t_i$ *dela beti. Beraz (ii) ere bete egiten da.*

$\Leftarrow$. *Demagun orain* f *endomorfismoak (i) eta (ii) baldintzak betetzen dituela. Izan bitez* $\lambda_1, ..., \lambda_s$ $\chi_f(x)$ *polinomioaren erro desberdinak.* $\beta_{V(\lambda_i)} = \{v_{i1}, ..., v_{it_i}\}$ $V(\lambda_i)$ *azpiespazio propioaren oinarri bat bada,* $i = 1, .., s$ *frogatuko dugu* $\beta = \beta_{V(\lambda_1)} \cup \cdots \cup \beta_{V(\lambda_s)}$ V*-ren oinarria dela. Orduan berehalakoa da konprobatzea* $M_\beta(f)$ *matrize diagonala dela. Oinarria dela frogatzeko ondorengo bi propietateak frogatzearekin nahikoa da:*

1.- $|\beta| = n = dimV$.

2.- β *sistema askea da.*

Lehenengoa frogatzeko ohartu $v \in \beta_{V(\lambda_i)} \cap \beta_{V(\lambda_j)}$ *bada orduan* $\lambda_i v = f(v) = \lambda_j v$. *Beraz* $(\lambda_i - \lambda_j)v = 0$ *eta aukera bakarra, balio propioak desberdinak direlako,* $v = 0$ *izatea da. Ondorioz* $|\beta| = |\beta_{V(\lambda_1)}| + \cdots |\beta_{V(\lambda_s)}| = m(\lambda_1) + ... + m(\lambda_s) = n = dimV$.

Bestalde, sistema askea dela frogatzeko hurrengo inplikazioa frogatu behar dugu:

$$k_{11}v_{11} + ... + k_{1t_1}v_{1t_1} + \cdots + k_{s1}v_{s1} + ... + k_{st_s}v_{st_s} = 0 \Rightarrow k_{11} = \cdots = k_{st_s} = 0$$

Izan bedi $v_i = k_{i1}v_{i1} + ... + k_{it_i}v_{it_i} \in V(\lambda_i)$, $i = 1, ..., s$. *Orduan aurreko inplikazioko lehenengo partea honela gelditzen zaigu:*

$$v_1 + \cdots + v_s = 0$$

Balio propio desberdinei elkartutako bektore propioak linealki independenteak direnez orduan $v_1 = \cdots = v_s = 0$. *Hau da* $v_i = k_{i1}v_{i1} + ... + k_{it_i}v_{it_i} = 0$ $i = 1, ..., s$. *Baina* $V(\lambda_i)$ *azpiespazioaren oinarria denez,* $i = 1, ..., s$ *orduan* $k_{i1} = ... = k_{it_i} = 0$, $i = 1, ..., s$.

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non:

$$f(x, y, z) = (2x, x + y, 3x + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

f diagonalgarria al da?

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Lehenengo polinomio karakteristikoa lortuko dugu:

$$\chi_f(x) = \chi_{M_{\beta_k}(f)}(x) = det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ -3 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1)^2.$$

Orduan polinomioaren erroak: $2, 1$ gorputzaren gainean daude eta (i) baldintza betetzen da.

Bestalde (ii) baldintzaren egiaztapenean, ohartu $m(2) = 1$ eta $m(1) = 2$ beraz ziurtatuta dago $m(2) =$dim$V(2)$ berdintza. Bestea ikusteko kalkukatu behar dugu $V(1)$:

$$V(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f(x, y, z) = (x, y, z)\} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Orduan dim$V(1) = 2 = m(1)$ eta (ii) ere betetzen da. Beraz f diagonalgarria da eta forma diagonala ematen duen oinarri lortzeko $V(2)$ kalkulatu behar dugu:

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f(x, y, z) = 2(x, y, z)\} = \langle (1, 1, 3) \rangle$$

Orduan $\beta = \beta_{V(1)} \cup \beta_{V(2)} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 3)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonala da.

■

Ondorioa 6.0.4. *Izan bedi $f \in End(V)$ non:*

$$\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_s)^{t_s}$$

hau da, polinomio karakteristikoaren erroak $\lambda_1, ..., \lambda_s$ gorputzaren gaineran daude. Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

1.- f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin existitzen bada bektore propioekin osatutako V-ren oinarri bat.

2.- f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin $V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_s)$ bada.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

2.- MATRIZE KARRATUEN KASUA

Definizioa 6.0.5. *Izan bedi $A \in M_n(K)$. Orduan A* **diagonalgarria** *dela esaten da existitzen bada P matrize alderanzgarri bat non $P^{-1}AP$ matrize diagonala den.*

Oharra 6.0.6. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta β V-ren oinarria orduan :*

$$f \text{ diagonalgarria da } \Leftrightarrow M_\beta(f) \text{ diagonalgarria}$$

Ondorioa 6.0.7. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrizea. Orduan A diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen badira:*

- *(i) $\chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean daude.*
- *(ii) λ A-ren balio propio bakoitzarentzat:*

$$dimV(\lambda) = m(\lambda)$$

Frogapena 6.0.8. *A matrizeari endomorfismo bat elkartzen diogu hurrengo datuekin: $f \in End(K^n)$ eta $M_{\beta_k}(f) = A$. Orduan A diagonalgarria da baldin eta soilik baldin f diagonalgarria bada eta honetarako:*

- *(i) $\chi_f(x) = \chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean daude.*
- *(ii) λ A-ren balio propio bakoitzarentzat:*

$$dimV(\lambda) = m(\lambda)$$

Gainera $P = M_\beta^{\beta_k}$ da.

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea. A matrize diagonalgarria al da?

1.- Alde batetik polinomio karakteristikoa kalkulatzen dugu:

$$\chi_A(x) = det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ -3 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1)^2$$

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

Orduan erroak $2, 1$ gorputzaren gainean daudenez (i) baldintza betetzen da.

2. Bestetik, azpiespazio propioak kalkulatzen ditugu:

$$V(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

eta

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \langle (1, 1, 3) \rangle$$

Orduan $\dim V(1) = 2 = m(1)$ eta $\dim V(2) = 1 = m(2)$ berdintzak ditugunez (ii) ere bete egiten da. Ondorioz A matrize diagonalgarria da eta $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrize alderanzgarriarekin:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrize diagonala da.}$$

■

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia