6. Gaia 6

Matrize Karratu baten Balio eta Bektore Propioak

[1]

Definizioa 6.0.1. *Izan bedi* $A \in M_n(K)$ *karratua.* $\lambda \in K$ f*-ren* **balio propioa** *dela esaten da baldin eta existitzen bada* $(a_1, ..., a_n) \in K^n - \{(0, ..., 0)\}$ *non:*

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Kasu honetan, $(a_1, ..., a_n)$ λ*-ri elkartutako* **bektore propioa** *dela esaten da.*

Oharra 6.0.2. *Ohartu* $f \in End(V)$ *bada eta* β V*-ren oinarria bada orduan, definizioaren arabera,* f*-ren balio propioak eta* $M_\beta(f)$ *matrizearen balio propioak berberak dira.*

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea. Kalkula ditzagun A-ren balio propioak. λ A-ren balio propioa izateko existitu behar da (a_1, a_2) bektore ez-nulua non:

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

orduan hurrengo sistema lortzen dugu:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)a_1 - 3a_2 = 0 \\ -2a_1 + (\lambda - 2)a_2 = 0 \end{cases}$$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Hau da:

$$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & -3 \\ -2 & (\lambda-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema homogeneoaren soluzio ez-nulu bat behar dugu. Hau da, sistema bateragarri indeterminatua izan behar du eta horretarako derrigorrezkoa da $det(\begin{pmatrix} (\lambda-1) & -3 \\ -2 & (\lambda-2) \end{pmatrix} = 0$ izatea. Beraz, λ $x^2 - 3x - 4$ polinomioaren erroa izan behar du. Ondorioz $\lambda = -1$ eta $\lambda = 4$ dira aukerak.

■

Aurreko adibidea jarraituz hurrengo polinomioa definituko dugu:

Definizioa 6.0.3. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratua. Orduan A-ren* **polinomio karakteristikoa** $\chi_A(x)$ *hurrengo determinantea da:*

$$det(XI_n - A)$$

Teorema 6.0.4. *Izan bitez $A \in M_n(K)$ eta $\lambda \in K$. Orduan:*

λ A-ren balio propioa da baldin eta soilik baldin λ $\chi_A(x)$ polinomioaren erroa bada.

Frogapena 6.0.5. *λ A-ren balio propioa da $\Leftrightarrow$ existitzen bada $(a_1, ..., a_n)$ ez-nulua non $A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ betetzen den $\Leftrightarrow$ existitzen bada $(a_1, ..., a_n)$ ez-nulua non $(\lambda I_n - A) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ betetzen den. Hau da, sistema bateragarri indeterminatua izan behar du eta horretarako nahitaezkoa da $det(\lambda I_n - A) = 0$.*

Definizioa 6.0.6. *Izan bitez $A, B \in M_n(K)$. A eta B* **antzekoak** *direla esaten da baldin eta soilik baldin existitzen bada P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = B$ den.*

Ohartu endomorfismo batean elkartutako matrizeak $M_\beta(f)$ modukoak badira orduan matrize mota hauek antzekoak direla.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Teorema 6.0.7. *Izan bitez A eta B antzekoak orduan $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.*

Frogapena 6.0.8. *A eta B antzekoak direnez existitzen da P matrize alderanzgarri bat non $P^{-1}AP = B$ den. Bestalde, $\chi_B(x) = det(xI_n - B)$ denez hurrengo berdintzak ditugu:*

$$\chi_B(x) = det(xI_n - B) = det(XP^{-1}I_nP - P^{-1}AP) =$$

$$= det(P^{-1}(xI_n - A)P) = det(P^{-1})det(xI_n - A)det(P) = \chi_A(x)$$

Aurreko definioa eta oharrak hurrengo definizioa motibatzen du.

Definizioa 6.0.9. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta β V-ren oinarria. f-ren* **polinomio karakteristikoa**, *$\chi_f(x)$ moduan adieraziko duguna, $M_\beta(f)$ matrizearen polinomio karakteristikoa da. Hau da:*

$$\chi_f(x) = det(xI_n - M_\beta(f)).$$

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non:

$$f(x, y, z) = (x + y, y, y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zein da f-ren polinomio karakteristikoa? Definizioaren arabera hurrengo determinantea kalkulatu behar dugu:

$$\chi_f(x) = \chi_{M_{\beta_k}(f)} = det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3$$

■

Ondorioa 6.0.10. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta $\lambda \in K$. Orduan λ f-ren balio propioa da baldin eta soilik baldin λ $\chi_f(x)$ polinomioaren erroa bada.*

Adibidea. Aurreko adibideko f endomorfismoaren balio propio bakarra 1 da. ■

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

Definizioa 6.0.11. *λ balio propioaren anizkoiztasuna $\chi_f(x)$ polinomioaren erro moduan $m(\lambda)$ moduan adieraziko dugu.*

Teorema 6.0.12. *Izan bedi λ f-ren balio propioa. Orduan:*

$$dimV(\lambda) \leq m(\lambda)$$

Frogapena 6.0.13. *Izan bedi $\{v_1, ..., v_s\}$ $V(\lambda)$ azpiespazioaren oinarri bat. Luzatzen dugu V-ren oinarri bateraino: $\beta = \{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$. Orduan f-ri elkartutako matrizea oinarri horretan hurrengoa da:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{ss+1} & \cdots & a_{sn} \\ a_{s+1,1} & a_{s+1,2} & \cdots & a_{s+1,s} & a_{s+1,s+1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,s} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Beraz $\chi_f(x) = det(xI_n - M_\beta(f)) = (x-\lambda)^s q(x)$. Orduan $m(\lambda) \geq s = dimV(\lambda)$.

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia