6. Gaia 6

Endomorfismoa Baten Balio eta Bektore Propioak

[1]

Definizioa 6.0.1. *Izan bedi $f \in End(V)$. $\lambda \in K$ f-ren* **balio propioa** *dela esaten da existitzen bada $v \in V - \{0\}$ non $f(v) = \lambda v$ betetzen den. Kasu honetan, v λ-ri elkartutako* **bektore propioa** *dela esaten da.*

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non:

$$f(x, y, z) = (x + y, y, y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Ikus dezagun $\lambda = 0$ f-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ non $f(x, y, z) = 0 \cdot (x, y, z)$ betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistema homogeneoaren soluzio ez-nulu bat.

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

Argi eta garbi, sistemaren soluzio bakarra $(0, 0, 0)$ beraz $\lambda = 0$ ez da f-ren balio propioa.

(ii) Ikus dezagun $\lambda = 1$ f-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ non $f(x, y, z) = 1 \cdot (x, y, z)$ betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistemaren soluzio ez-nulu bat.

$$\begin{cases} x + y &= x \\ y &= y \\ y + z &= z \end{cases}$$

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Sistemaren soluzioen multzoa $\{(x,0,z) \quad | \quad x,z \in \mathbb{R}\}$ da eta beraz, badaude bektore ez-nuluak. Honek frogatzen du $\lambda = 1$ f-ren balio propioa dela eta bestalde $(x,0,z)$ moduko bektore ez-nulu guztiak 1 balio propioari elkartutako bektore propioak dira. ■

Teorema 6.0.2. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta $\lambda \in K$ f-ren balio propioa. Definitzen dugu hurrengo multzoa:*

$$V(\lambda) = \{v \in V \quad | \quad f(v) = \lambda \cdot v\}$$

Orduan $V(\lambda)$ azpiespazio f-aldagaitza da eta $\beta_{V(\lambda)}$ $V(\lambda)$-ren oinarri bat bada:

$$M_{\beta_{V(\lambda)}}(f_{|V(\lambda)}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Frogapena 6.0.3. *Argi eta garbi $V(\lambda)$ azpiespazioa da. Gainera $v \in V(\lambda)$ bada orduan $f(v) = \lambda v \in V(\lambda)$, $V(\lambda)$ azpiespazioa baita. $\beta_{V(\lambda)} = \{v_1, ..., v_s\}$ $V(\lambda)$-ren oinarri bat bada orduan $f(v_i) = \lambda \cdot v_i$, $i = 1, .., s$ beraz:*

$$M_{\beta_{V(\lambda)}}(f_{|V(\lambda)}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema 6.0.4. *Izan bedi $f \in End(V)$. $\lambda_1, ..., \lambda_r$ f-ren balio propio desberdinak badira eta $v_1, ..., v_r$ balio propioei elkartutako bektore propioak, hurrenez-hurren, orduan:*

$$\{v_1, ..., v_r\} \qquad \text{sistema askea da.}$$

Frogapena 6.0.5. *r gaineko indukzioa erabiliko dugu:*

(i) $r = 1$ deneko kasuan $\{v_1\}$ sistema askea da v_1 bektore ez-nulua delako (ohartu bektore propioa izateko baldintzetako bat ez-nulua izatea dela)

(ii) Demagun $r-1$ kasuan betetzen dela eta froga dezagun r kasuan. Horretarako hurrengo inplikazio frogatu behar dugu:

$$k_1v_1 + ... + k_rv_r = 0 \Rightarrow k_1 = ... = k_r = 0$$

Hasierako berdintzan bi ergaiketa egingo ditugu:

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

1.- Aplika diezaiogun f. *Orduan* $f(k_1v_1 + ... + k_rv_r) = f(0)$ *betetzen da.* f *aplikazio lineala denez* $k_1f(v_1) + ... + k_rf(v_r) = 0$ *berdintzan bihurtzen da. Gainera,* v_i λ_i *balio propioari elkartutako bektore propioa denez* $f(v_i) = \lambda_iv_i$ *da,* $i = 1, ..., r$. *Beraz* $k_1\lambda_1v_1 + ... + k_r\lambda_rv_r = 0$ *da.*

2.-Bestalde biderka dezagun lehengo berdintza λ_r*-rengatik. Orduan* $k_1\lambda_rv_1 + ... + k_r\lambda_rv_r = 0$ *lortuko genuke.*

1.- eta 2.-n lortutako bi ekuazioen kendura egiten badugu hurrengo ekuazioa dugu:

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + ... + k_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0$$

Indukzioa aplikatuz $k_1(\lambda_1 - \lambda_r) = ... = k_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) = 0$ *dugu eta balio propioak desberdinak direnez* $k_1 = ... = k_{r-1} = 0$ *ondorioztatzen da. Balio hauek hasierako berdintzara eramaten baditugu:* $k_1v_1 + ... + k_rv_r = 0$ *bihurtzen da* $k_rv_r = 0$, v_r *ez nulua izanik. Hau da* k_r *ere* 0 *izan behar du.*

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia