6. Gaia 6

Azpiespazio f-Aldagaitzak

[1]

Definizioa 6.0.1. *Izan bitez $W \leq V$ eta $f \in End(V)$. W f-aldagaitza dela esaten da baldin eta $f(W) \leq W$ betetzen bada, hau da, $f(w) \in W, \forall w \in W$.*

Adibidea. 1.- Identitate aplikazioarekin azpiespazio guztiak f-aldagaitzak dira.

2.- $\{0\}$ eta V beti dira azpiespazio f-aldagaitzak, f izanik edozein endomorfismoa.

3.- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazioa non $f(x, y) = (x, -y)$ den. Orduan $W_1 = \{(x, y) \mid x = 0\}$ eta $W_2 = \{(x, y) \mid y = 0\}$ azpiespazio f-aldagaitzak dira baina $W_3 = \{(x, y) \mid x = y\}$ ez da azpiespazio f-aldagaitza.

4.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazioa non

$$f(x, y, z) = (-2y + 4z, -x - y + z, 3x - 3y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Orduan $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ ez da f-aldagaitza, $W_2 = \{(x, 0, x) \mid x = 0\}$ f-aldagaitza da eta $W_3 = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ez da f-aldagaitza.

■

Teorema 6.0.2. *Izan bedi $f \in End(V)$ orduan baliokideak dira:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2$ da, W_1 eta W_2 azpiespazio f-aldagaitzak izanik.

(ii) Existitzen da β V-ren oinarria non:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Frogapena 6.0.3. *$(i) \Rightarrow (ii)$ Demagun $V = W_1 \oplus W_2$ dela , W_1 eta W_2 azpiespazio f-aldagaitzak izanik. Orduan $\beta_{W_1} = \{w_1, ..., w_t\}$ eta $\beta_{W_2} = \{w_{t+1}, ..., w_n\}$ W_1 eta W_2-ren oinarriak badira hurrenez-hurren $\beta = \beta_{W_1} \cup \beta_{W_2}$ V-ren oinarria da. Ikus dezagun nola den $M_\beta(f)$.*

Alde batetik, $i = 1, ..., t$ guztietarako $w_i \in W_1$ eta W_1 f-aldagaitza da, beraz $f(w_i) = \lambda_{1i}w_1 + ... + \lambda_{ti}w_t = \lambda_{1i}w_1 + ... + \lambda_{ti}w_t + 0w_{t+1} + ... + 0w_n$. Orduan matrize elkartuaren lehenengo t zutabeak hauek dira:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1t} & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{t1} & \lambda_{t2} & \cdots & \lambda_{tt} & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ? & \cdots & ? \end{pmatrix}$$

Lortu dugu $B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{t1} & \lambda_{t2} & \cdots & \lambda_{tt} \end{pmatrix}$ matrizea.

Era berean lortzen da B_2 matrizea eta amaieran $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ izango dugu.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Demagun orain existitzen dela $\beta = \{w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_n\}$ V-ren oinarria non $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ den t izanik B_1 matrizearen zutabe/lerro kopurua. Definitzen ditugu hurrengo azpiespazioak:

$$W_1 = \langle w_1, ..., w_t \rangle$$

eta

$$W_2 = \langle w_{t+1}, ..., w_n \rangle$$

Argi eta garbi $V = W_1 \oplus W_2$ betetzen da. Ikus dezagun azpiespazio f-aldagaitzak direla (W_1-en kasuan frogatuko dugu eta W_2 kasua antzekoa da). $W_1 = \langle w_1, ..., w_t \rangle$ denez $f(W_1) = \langle f(w_1), ..., f(w_t) \rangle$ da. Bestalde, $M_\beta(f)$ matrizearen lehenengo t zutabeak begiratuta hurrengoa lor dezakegu:

$$f(w_i) = \lambda_{1i}w_1 + ... + \lambda_{ti}w_t + 0w_{t+1} + ... + 0w_n, \forall i \in \{1, ..., t\}$$

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Beraz $f(w_i) = \lambda_{1i}w_1 + ... + \lambda_{ti}w_t \in \langle w_1, ..., w_t\rangle = W_1$. Hau da, W_1 f aldagaitza da.

Oharra 6.0.4. *1.- Izan bedi $f \in End(V)$ eta demagun W azpiespazio f-aldagaitza dela. Orduan hurrengo aplikazio definidezakegu:*

$$\begin{array}{cccc} : & W & \to & W \\ & w & \mapsto & f(w) \end{array}$$

Aplikazio hau f-ren **murrizketa** *W azpiespazioa deitzen da eta adierazteko idatziko dugu $f_{|W_1}$. Ohartu f lineala denez $f_{|W_1}$ ere aplikazio lineala dela.*

2.- Ohartu, frogapena begiratuz, aurreko teoremako B_1 eta B_2 matrizeak hauek direla:

$$B_1 = M_{\beta_{W_1}}(f_{|W_1}) \quad \textit{eta} \quad B_2 = M_{\beta_{W_2}}(f_{|W_2})$$

Ondorioa 6.0.5. *Izan bedi $f \in End(V)$ orduan baliokideak dira:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$ da, $W_1, ..., W_n$ azpiespazio f-aldagaitzak izanik.

(ii) Existitzen da β V-ren oinarria non:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{pmatrix}$$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia