6. Gaia 6

Endomorfismoen Diagonalketa

[1]

6.1 Sarrera

1.- **ENDOMORFISMOEN KASUA**

Izan bedi V dimentsio finituko K-espazio bektoriala. f V gaineko endomorfismoa bada hurrengo galdera planteiatzen dugu: Existitzen al da β V-ren oinarri bat non:

$$M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}?$$

Hau da matrize elkartua diagonala den. Zergatik? Matrize diagonalak dira matrize guztien artean errezenak maneiatzen.

Ohartu aurreko gaian ikusi duzuela $f : V \to V$ aplikazio lineala bada existitzen direla bi oinarriak β eta β' non:

$$M_\beta^{\beta'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lortutako matrizea diagonala da baina gai honetan eskatzen dugu gainera eremuko eta helburu-multzoko oinaria berbera izatea eta hau aurreko teoremak ez digu zihurtatzen.

2.- **MATRIZE KARRATUEN KASUA**

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

Galdera baliokidea planteiatu ahal dugu matrizeen kasuan ere. Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratua. Existitzen al da P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP =$ matrize diagonala den?

Demagun endomorfismoen kasuan galderaren erantzuna lortu dugula. Orduan matrizeen kasuan ere erantzuna lortuko genuke. Dakigunez, A matrizeari f endomorfismo bat elkartu ahal zaio. Aukeratzen dugu K^n eta β_k oinarri kanonikoa eta eskatzen dugu $M_{\beta_k}(f) = A$ izatea. Orduan existituko balitz β oinarri bat non $M_\beta(f) = D$ matrize diagonala den, A eta D endomorfismo berdinari elkartutako matrizeak izango ziren. Beraz existitzen da $P = M_\beta^{\beta_k}$ matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = D$ matrize diagonala den.

Sarrera honetan bi galdera planteiatu ditugun arren ikusi dugu azkenean galdera bakar batean bihurtzen dela:

Existitzen al da β V-ren oinarri bat non:

$$M_\beta^\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}?$$

Oharra 6.1.1. *1.- Hemendik aurrera $M_\beta^\beta(f)$ idatzi beharrean $M_\beta(f)$ idatziko dugu.*

2.- $P^{-1}AP = D$ diagonala izatean betetzen duen P matrize alderanzgarriari **aldaketa matrizea** *deitzen zaio.*

6.2 Azpiespazio f-Aldagaitzak

Definizioa 6.2.1. *Izan bitez $W \leq V$ eta $f \in End(V)$. W f-aldagaitza dela esaten da baldin eta $f(W) \leq W$ betetzen bada, hau da, $f(w) \in W, \forall w \in W$.*

Adibidea. 1.- Identitate aplikazioarekin azpiespazio guztiak f-aldagaitzak dira.

[2]

2.- $\{0\}$ eta V beti dira azpiespazio f-aldagaitzak, f izanik edozein endomorfismoa.

3.- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazioa non $f(x,y) = (x,-y)$ den. Orduan $W_1 = \{(x,y) \mid x = 0\}$ eta $W_2 = \{(x,y) \mid y = 0\}$ azpiespazio f-aldagaitzak dira baina $W_3 = \{(x,y) \mid x = y\}$ ez da azpiespazio f-aldagaitza.

4.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazioa non

$$f(x,y,z) = (-2y+4z, -x-y+z, 3x-3y+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Orduan $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$ ez da f-aldagaitza, $W_2 = \{(x,0,x) \mid x = 0\}$ f-aldagaitza da eta $W_3 = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ez da f-aldagaitza.

■

Teorema 6.2.2. *Izan bedi $f \in End(V)$ orduan baliokideak dira:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2$ da, W_1 eta W_2 azpiespazio f-aldagaitzak izanik.

(ii) Existitzen da β V-ren oinarria non:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

Frogapena 6.2.3. *(i) $\Rightarrow$ (ii) Demagun $V = W_1 \oplus W_2$ dela , W_1 eta W_2 azpiespazio f-aldagaitzak izanik. Orduan $\beta_{W_1} = \{w_1, ..., w_t\}$ eta $\beta_{W_2} = \{w_{t+1}, ..., w_n\}$ W_1 eta W_2-ren oinarriak badira hurrenez-hurren $\beta = \beta_{W_1} \cup \beta_{W_2}$ V-ren oinarria da. Ikus dezagun nola den $M_\beta(f)$.*

Alde batetik, $i = 1, ..., t$ guztietarako $w_i \in W_1$ eta W_1 f-aldagaitza da, beraz $f(w_i) = \lambda_{1i}w_1 + ... + \lambda_{ti}w_t = \lambda_{1i}w_1 + ... + \lambda_{ti}w_t + 0w_{t+1} + ... + 0w_n$. Orduan matrize elkartuaren lehenengo t zutabeak hauek dira:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1t} & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{t1} & \lambda_{t2} & \cdots & \lambda_{tt} & ? & \cdots & ? \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ? & \cdots & ? \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & ? & \cdots & ? \end{pmatrix}$$

Lortu dugu $B_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_{t1} & \lambda_{t2} & \cdots & \lambda_{tt} \end{pmatrix}$ *matrizea.*

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Era berean lortzen da B_2 matrizea eta amaieran $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ izango dugu.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Demagun orain existitzen dela $\beta = \{w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_n\}$ V-ren oinarria non $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ den t izanik B_1 matrizearen zutabe/lerro kopurua. Definitzen ditugu hurrengo azpiespazioak:

$$W_1 = \langle w_1, ..., w_t \rangle$$

eta

$$W_2 = \langle w_{t+1}, ..., w_n \rangle$$

Argi eta garbi $V = W_1 \oplus W_2$ betetzen da. Ikus dezagun azpiespazio f-aldagaitzak direla (W_1-en kasuan frogatuko dugu eta W_2 kasua antzekoa da). $W_1 = \langle w_1, ..., w_t \rangle$ denez $f(W_1) = \langle f(w_1), ..., f(w_t) \rangle$ da. Bestalde, $M_\beta(f)$ matrizearen lehenengo t zutabeak begiratuta hurrengoa lor dezakegu:

$$f(w_i) = \lambda_{1i} w_1 + ... + \lambda_{ti} w_t + 0 w_{t+1} + ... + 0 w_n, \forall i \in \{1, ..., t\}$$

Beraz $f(w_i) = \lambda_{1i} w_1 + ... + \lambda_{ti} w_t \in \langle w_1, ..., w_t \rangle = W_1$. Hau da, W_1 f aldagaitza da.

Oharra 6.2.4. *1.- Izan bedi $f \in End(V)$ eta demagun W azpiespazio f-aldagaitza dela. Orduan hurrengo aplikazio definidezakegu:*

$$\begin{array}{rccc} : & W & \to & W \\ & w & \mapsto & f(w) \end{array}$$

Aplikazio hau f-ren **murrizketa** *W azpiespazioa deitzen da eta adierazteko idatziko dugu $f_{|W_1}$. Ohartu f lineala denez $f_{|W_1}$ ere aplikazio lineala dela.*

2.- Ohartu, frogapena begiratuz, aurreko teoremako B_1 eta B_2 matrizeak hauek direla:

$$B_1 = M_{\beta_{W_1}}(f_{|W_1}) \quad eta \quad B_2 = M_{\beta_{W_2}}(f_{|W_2})$$

Ondorioa 6.2.5. *Izan bedi $f \in End(V)$ orduan baliokideak dira:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$ da, $W_1, ..., W_n$ azpiespazio f-aldagaitzak izanik.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

(ii) Existitzen da β V-ren oinarria non:

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{pmatrix}$$

6.3 Endomorfismoa Baten Balio eta Bektore Propioak

Definizioa 6.3.1. *Izan bedi $f \in End(V)$. $\lambda \in K$ f-ren* **balio propioa** *dela esaten da existitzen bada $v \in V - \{0\}$ non $f(v) = \lambda v$ betetzen den. Kasu honetan, v λ-ri elkartutako* **bektore propioa** *dela esaten da.*

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non:

$$f(x, y, z) = (x + y, y, y + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Ikus dezagun $\lambda = 0$ f-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ non $f(x, y, z) = 0 \cdot (x, y, z)$ betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistema homogeneoaren soluzio ez-nulu bat.

$$\begin{cases} x + y &= 0 \\ y &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

Argi eta garbi, sistemaren soluzio bakarra $(0, 0, 0)$ beraz $\lambda = 0$ ez da f-ren balio propioa.

(ii) Ikus dezagun $\lambda = 1$ f-ren balio propio bat den ala ez. Definizioaren arabera, existitu behar da $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ non $f(x, y, z) = 1 \cdot (x, y, z)$ betetzen den. Hau da aurkitu behar dugu hurrengo sistemaren soluzio ez-nulu bat.

$$\begin{cases} x + y &= x \\ y &= y \\ y + z &= z \end{cases}$$

Sistemaren soluzioen multzoa $\{(x, 0, z) \quad | \quad x, z \in \mathbb{R}\}$ da eta beraz, badaude bektore ez-nuluak. Honek frogatzen du $\lambda = 1$ f-ren balio propioa dela eta

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

bestalde $(x, 0, z)$ moduko bektore ez-nulu guztiak 1 balio propioari elkartutako bektore propioak dira. ■

Teorema 6.3.2. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta $\lambda \in K$ f-ren balio propioa. Definitzen dugu hurrengo multzoa:*

$$V(\lambda) = \{v \in V \quad | \quad f(v) = \lambda \cdot v\}$$

Orduan $V(\lambda)$ azpiespazio f-aldagaitza da eta $\beta_{V(\lambda)}$ $V(\lambda)$-ren oinarri bat bada:

$$M_{\beta_{V(\lambda)}}(f_{|V(\lambda)}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Frogapena 6.3.3. *Argi eta garbi $V(\lambda)$ azpiespazioa da. Gainera $v \in V(\lambda)$ bada orduan $f(v) = \lambda v \in V(\lambda)$, $V(\lambda)$ azpiespazioa baita. $\beta_{V(\lambda)} = \{v_1, ..., v_s\}$ $V(\lambda)$-ren oinarri bat bada orduan $f(v_i) = \lambda \cdot v_i$, $i = 1, .., s$ beraz:*

$$M_{\beta_{V(\lambda)}}(f_{|V(\lambda)}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema 6.3.4. *Izan bedi $f \in End(V)$. $\lambda_1, ..., \lambda_r$ f-ren balio propio desberdinak badira eta $v_1, ..., v_r$ balio propioei elkartutako bektore propioak, hurrenez-hurren, orduan:*

$$\{v_1, ..., v_r\} \qquad \textit{sistema askea da.}$$

Frogapena 6.3.5. *r gaineko indukzioa erabiliko dugu:*

(i) $r = 1$ deneko kasuan $\{v_1\}$ sistema askea da v_1 bektore ez-nulua delako (ohartu bektore propioa izateko baldintzetako bat ez-nulua izatea dela)

(ii) Demagun $r - 1$ kasuan betetzen dela eta froga dezagun r kasuan. Horretarako hurrengo inplikazio frogatu behar dugu:

$$k_1 v_1 + ... + k_r v_r = 0 \Rightarrow k_1 = ... = k_r = 0$$

Hasierako berdintzan bi ergaiketa egingo ditugu:

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[6]

1.- Aplika diezaiogun f. Orduan $f(k_1v_1 + ... + k_rv_r) = f(0)$ betetzen da. f aplikazio lineala denez $k_1f(v_1) + ... + k_rf(v_r) = 0$ berdintzan bihurtzen da. Gainera, v_i λ_i balio propioari elkartutako bektore propioa denez $f(v_i) = \lambda_iv_i$ da, $i = 1, ..., r$. Beraz $k_1\lambda_1v_1 + ... + k_r\lambda_rv_r = 0$ da.

2.-Bestalde biderka dezagun lehengo berdintza λ_r-rengatik. Orduan $k_1\lambda_rv_1 + ... + k_r\lambda_rv_r = 0$ lortuko genuke.

1.- eta 2.-n lortutako bi ekuazioen kendura egiten badugu hurrengo ekuazioa dugu:

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + ... + k_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} = 0$$

Indukzioa aplikatuz $k_1(\lambda_1 - \lambda_r) = ... = k_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) = 0$ dugu eta balio propioak desberdinak direnez $k_1 = ... = k_{r-1} = 0$ ondorioztatzen da. Balio hauek hasierako berdintzara eramaten baditugu: $k_1v_1 + ... + k_rv_r = 0$ bihurtzen da $k_rv_r = 0$, v_r ez nulua izanik. Hau da k_r ere 0 izan behar du.

6.4 Matrize Karratu baten Balio eta Bektore Propioak

Definizioa 6.4.1. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ karratua. $\lambda \in K$ f-ren* **balio propioa** *dela esaten da baldin eta existitzen bada $(a_1, ..., a_n) \in K^n - \{(0, ..., 0)\}$ non:*

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Kasu honetan, $(a_1, ..., a_n)$ λ-ri elkartutako **bektore propioa** *dela esaten da.*

Oharra 6.4.2. *Ohartu $f \in End(V)$ bada eta β V-ren oinarria bada orduan, definizioaren arabera, f-ren balio propioak eta $M_\beta(f)$ matrizearen balio propioak berberak dira.*

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ matrizea. Kalkula ditzagun A-ren balio propioak. λ A-ren balio propioa izateko existitu behar da (a_1, a_2) bektore ez-nulua non:

[6]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[7]

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

orduan hurrengo sistema lortzen dugu:

$$\begin{cases} (\lambda - 1)a_1 - 3a_2 = 0 \\ -2a_1 + (\lambda - 2)a_2 = 0 \end{cases}$$

Hau da:

$$\begin{pmatrix} (\lambda - 1) & -3 \\ -2 & (\lambda - 2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema homogeneoaren soluzio ez-nulu bat behar dugu. Hau da, sistema bateragarri indeterminatua izan behar du eta horretarako derrigorrezkoa da $det(\begin{pmatrix} (\lambda - 1) & -3 \\ -2 & (\lambda - 2) \end{pmatrix} = 0$ izatea. Beraz, λ $x^2 - 3x - 4$ polinomioaren erroa izan behar du. Ondorioz $\lambda = -1$ eta $\lambda = 4$ dira aukerak.

■

Aurreko adibidea jarraituz hurrengo polinomioa definituko dugu:

Definizioa 6.4.3. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrize karratua. Orduan A-ren* **polinomio karakteristikoa** $\chi_A(x)$ *hurrengo determinantea da:*

$$det(XI_n - A)$$

Teorema 6.4.4. *Izan bitez $A \in M_n(K)$ eta $\lambda \in K$. Orduan:*

λ A-ren balio propioa da baldin eta soilik baldin λ $\chi_A(x)$ polinomioaren erroa bada.

Frogapena 6.4.5. *λ A-ren balio propioa da $\Leftrightarrow$ existitzen bada $(a_1, ..., a_n)$ ez-nulua non $A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ betetzen den $\Leftrightarrow$ existitzen bada $(a_1, ..., a_n)$ ez-nulua non $(\lambda I_n - A) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ betetzen den. Hau da, sistema bateragarri indeterminatua izan behar du eta horretarako nahitaezkoa da $det(\lambda I_n - A) = 0$.*

[7] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[8]

Definizioa 6.4.6. *Izan bitez $A, B \in M_n(K)$. A eta B* **antzekoak** *direla esaten da baldin eta soilik baldin existitzen bada P matrize alderanzgarria non $P^{-1}AP = B$ den.*

Ohartu endomorfismo batean elkartutako matrizeak $M_\beta(f)$ modukoak badira orduan matrize mota hauek antzekoak direla.

Teorema 6.4.7. *Izan bitez A eta B antzekoak orduan $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.*

Frogapena 6.4.8. *A eta B antzekoak direnez existitzen da P matrize alderanzgarri bat non $P^{-1}AP = B$ den. Bestalde, $\chi_B(x) = det(xI_n - B)$ denez hurrengo berdintzak ditugu:*

$$\chi_B(x) = det(xI_n - B) = det(XP^{-1}I_nP - P^{-1}AP) =$$

$$= det(P^{-1}(xI_n - A)P) = det(P^{-1})det(xI_n - A)det(P) = \chi_A(x)$$

Aurreko definioa eta oharrak hurrengo definizioa motibatzen du.

Definizioa 6.4.9. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta β V-ren oinarria. f-ren* **polinomio karakteristikoa**, *$\chi_f(x)$ moduan adieraziko duguna, $M_\beta(f)$ matrizearen polinomio karakteristikoa da. Hau da:*

$$\chi_f(x) = det(xI_n - M_\beta(f)).$$

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non:

$$f(x, y, z) = (x + y, y, y + z), \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zein da f-ren polinomio karakteristikoa? Definizioaren arabera hurrengo determinantea kalkulatu behar dugu:

$$\chi_f(x) = \chi_{M_{\beta_k}(f)} = det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 \end{pmatrix} = (x-1)^3$$

■

[8] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[9]

Ondorioa 6.4.10. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta $\lambda \in K$. Orduan λ f-ren balio propioa da baldin eta soilik baldin λ $\chi_f(x)$ polinomioaren erroa bada.*

Adibidea. Aurreko adibideko f endomorfismoaren balio propio bakarra 1 da. ■

Definizioa 6.4.11. *λ balio propioaren anizkoiztasuna $\chi_f(x)$ polinomioaren erro moduan $m(\lambda)$ moduan adieraziko dugu.*

Teorema 6.4.12. *Izan bedi λ f-ren balio propioa. Orduan:*

$$dimV(\lambda) \leq m(\lambda)$$

Frogapena 6.4.13. *Izan bedi $\{v_1, ..., v_s\}$ $V(\lambda)$ azpiespazioaren oinarri bat. Luzatzen dugu V-ren oinarri bateraino: $\beta = \{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$. Orduan f-ri elkartutako matrizea oinarri horretan hurrengoa da:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{1,s+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{ss+1} & \cdots & a_{sn} \\ a_{s+1,1} & a_{s+1,2} & \cdots & a_{s+1,s} & a_{s+1,s+1} & \cdots & a_{s+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,s} & a_{n,s+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Beraz $\chi_f(x) = det(xI_n - M_\beta(f)) = (x-\lambda)^s q(x)$. Orduan $m(\lambda) \geq s = dimV(\lambda)$.

6.5 Endomorfismo eta Matrize Diagonalgarriak

1.- **ENDOMORFISMOEN KASUA**

Definizioa 6.5.1. *Izan bedi $f \in End(V)$. f* **diagonalgarria** *dela esango dugu baldin eta existitzen bada β V-ren oinarri bat non $M_\beta(f)$ matrize diagonala den.*

Teorema 6.5.2. *Izan bedi $f \in End(V)$. Orduan f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen badira:*

[9]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[10]

- *(i) $\chi_f(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean daude.*
- *(ii) λ f-ren balio propio bakoitzarentzat:*

$$dimV(\lambda) = m(\lambda)$$

Frogapena 6.5.3. $\Rightarrow$. *Demagun f diagonalgarria dela beraz existitzen da $\beta = \{v_{11}, ..., v_{1t_1}, ..., v_{s1}, ..., v_{st_s}\}$ non:*

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Orduan $\chi_f(x) = \chi_{M_\beta(f)}(x) = (x-\lambda_1)^{t_1} \cdots (x-\lambda_s)^{t_s}$. Beraz polinomioaren erroak $\lambda_1, ..., \lambda_s$ K gainean daude eta (i) betetzen da.

Bestalde, β oinarriko $\{v_{i1}, ..., v_{it_i}\}$ multzo askea $V(\lambda_i)$ azpiespazioan dago. Ondorioz $t_i \leq dimV(\lambda_i)$. Teorema batean ikusi genuen $dimV(\lambda_i) \leq m(\lambda_i) = t_i$ dela beti. Beraz (ii) ere bete egiten da.

$\Leftarrow$. *Demagun orain f endomorfismoak (i) eta (ii) baldintzak betetzen dituela. Izan bitez $\lambda_1, ..., \lambda_s$ $\chi_f(x)$ polinomioaren erro desberdinak. $\beta_{V(\lambda_i)} = \{v_{i1}, ..., v_{it_i}\}$ $V(\lambda_i)$ azpiespazio propioaren oinarri bat bada, $i = 1, .., s$ frogatuko dugu $\beta = \beta_{V(\lambda_1)} \cup \cdots \cup \beta_{V(\lambda_s)}$ V-ren oinarria dela. Orduan berehalakoa da konprobatzea $M_\beta(f)$ matrize diagonala dela. Oinarria dela frogatzeko ondorengo bi propietateak frogatzearekin nahikoa da:*

1.- $|\beta| = n = dimV$.

2.- β sistema askea da.

Lehenengoa frogatzeko ohartu $v \in \beta_{V(\lambda_i)} \cap \beta_{V(\lambda_j)}$ bada orduan $\lambda_i v = f(v) = \lambda_j v$. Beraz $(\lambda_i - \lambda_j)v = 0$ eta aukera bakarra, balio propioak desberdinak direlako, $v = 0$ izatea da. Ondorioz $|\beta| = |\beta_{V(\lambda_1)}| + \cdots |\beta_{V(\lambda_s)}| = m(\lambda_1) + ... + m(\lambda_s) = n = dimV$.

Bestalde, sistema askea dela frogatzeko hurrengo inplikazioa frogatu behar dugu:

$$k_{11}v_{11} + ... + k_{1t_1}v_{1t_1} + \cdots + k_{s1}v_{s1} + ... + k_{st_s}v_{st_s} = 0 \Rightarrow k_{11} = \cdots = k_{st_s} = 0$$

[10]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[11]

Izan bedi $v_i = k_{i1}v_{i1} + ... + k_{it_i}v_{it_i} \in V(\lambda_i)$, $i = 1, ..., s$. Orduan aurreko inplikazioko lehenengo partea honela gelditzen zaigu:

$$v_1 + \cdots + v_s = 0$$

Balio propio desberdinei elkartutako bektore propioak linealki independenteak direnez orduan $v_1 = \cdots = v_s = 0$. Hau da $v_i = k_{i1}v_{i1} + ... + k_{it_i}v_{it_i} = 0$ $i = 1, ..., s$. Baina $V(\lambda_i)$ azpiespazioaren oinarria denez, $i = 1, ..., s$ orduan $k_{i1} = ... = k_{it_i} = 0$, $i = 1, ..., s$.

Adibidea. Izan bedi $f \in End(\mathbb{R}^3)$ non:

$$f(x, y, z) = (2x, x + y, 3x + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

f diagonalgarria al da?

Lehenengo polinomio karakteristikoa lortuko dugu:

$$\chi_f(x) = \chi_{M_{\beta_k}(f)}(x) = det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ -3 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1)^2.$$

Orduan polinomioaren erroak: $2, 1$ gorputzaren gainean daude eta (i) baldintza betetzen da.

Bestalde (ii) baldintzaren egiaztapenean, ohartu $m(2) = 1$ eta $m(1) = 2$ beraz ziurtatuta dago $m(2) = \dim V(2)$ berdintza. Bestea ikusteko kalkukatu behar dugu $V(1)$:

$$V(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f(x, y, z) = (x, y, z)\} = \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$$

Orduan $\dim V(1) = 2 = m(1)$ eta (ii) ere betetzen da. Beraz f diagonalgarria da eta forma diagonala ematen duen oinarri lortzeko $V(2)$ kalkulatu behar dugu:

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad f(x, y, z) = 2(x, y, z)\} = \langle (1, 1, 3) \rangle$$

Orduan $\beta = \beta_{V(1)} \cup \beta_{V(2)} = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 3)\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarria da eta $M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonala da.

$\blacksquare$

[11]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[12]

Ondorioa 6.5.4. *Izan bedi $f \in End(V)$ non:*

$$\chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{t_1} \cdots (x - \lambda_s)^{t_s}$$

hau da, polinomio karakteristikoaren erroak $\lambda_1, ..., \lambda_s$ gorputzaren gaineran daude. Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

1.- f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin existitzen bada bektore propioekin osatutako V-ren oinarri bat.

2.- f diagonalgarria da baldin eta soilik baldin $V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_s)$ bada.

2.- MATRIZE KARRATUEN KASUA

Definizioa 6.5.5. *Izan bedi $A \in M_n(K)$. Orduan A* **diagonalgarria** *dela esaten da existitzen bada P matrize alderanzgarri bat non $P^{-1}AP$ matrize diagonala den.*

Oharra 6.5.6. *Izan bitez $f \in End(V)$ eta β V-ren oinarria orduan :*

$$f \text{ diagonalgarria da } \Leftrightarrow M_\beta(f) \text{ diagonalgarria}$$

Ondorioa 6.5.7. *Izan bedi $A \in M_n(K)$ matrizea. Orduan A diagonalgarria da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen badira:*

- *(i) $\chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean daude.*
- *(ii) λ A-ren balio propio bakoitzarentzat:*

$$dimV(\lambda) = m(\lambda)$$

Frogapena 6.5.8. *A matrizeari endomorfismo bat elkartzen diogu hurrengo datuekin: $f \in End(K^n)$ eta $M_{\beta_k}(f) = A$. Orduan A diagonalgarria da baldin eta soilik baldin f diagonalgarria bada eta honetarako:*

- *(i) $\chi_f(x) = \chi_A(x)$ polinomioaren erro guztiak K gainean daude.*
- *(ii) λ A-ren balio propio bakoitzarentzat:*

$$dimV(\lambda) = m(\lambda)$$

[12] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

13

Gainera $P = M_{\beta}^{\beta_k}$ *da.*

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea. A matrize diagonalgarria al da?

1.- Alde batetik polinomio karakteristikoa kalkulatzen dugu:

$$\chi_A(x) = det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & 0 \\ -3 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-2)(x-1)^2$$

Orduan erroak $2, 1$ gorputzaren gainean daudenez (i) baldintza betetzen da.

2. Bestetik, azpiespazio propioak kalkulatzen ditugu:

$$V(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$$

eta

$$V(2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\} = \langle(1,1,3)\rangle$$

Orduan $\dim V(1) = 2 = m(1)$ eta $\dim V(2) = 1 = m(2)$ berdintzak ditugunez (ii) ere bete egiten da. Ondorioz A matrize diagonalgarria da eta $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrize alderanzgarriarekin:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrize diagonala da.}$$

■

[13] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia