5. Gaia 5

Determinantearen Aplikazioak

[1]

5.1 Alderantzizkoaren Kalkulua

Definizioa 5.1.1. *$A \in M_n(IK)$ bada , A-ren* **matrize adjuntua***, $adj(A)$ denotatuko duguna, A-ko elementuen adjuntuek osatutakoa da: $adj(A) = (A_{ij}) \in M_n(IK)$.*

Teorema 5.1.2. *Izan bedi $A \in M_n(IK)$. Orduan:*

$$A \in GL_n(IK) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Gainera, kasu horretan $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(adj(A))$ da.

5.2 Cramerren Sistemak

Definizioa 5.2.1. *n ekuazio linealeko eta n ezezaguneko sistema bat,*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right.$$

Cramerren sistema *deitzen da $det(A) \neq 0$ bada. (Hau da A alderanzgarria edo $rg(A) = n$ bada.)*

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Teorema 5.2.2 (Cramerren Erregela)**.** *Izan bedi $AX = B$ Cramerren sistema bat. Orduan sistema bateragarri determinatua da eta soluzioa:*

$$\frac{x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det(A), i = 1, ..., n}$$

Frogapena 5.2.3. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Determinantearen propietateak erabiliz azken determinatea hurrengoaren berdina da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ohartu determinante guztietan x_j kanpora atera ahal dugula eta i. batugaian izan ezik beste determinanteak nuluak dira kasu horietan matrizea bi zutabe berdinak bait ditu. Ondorioz aurreko batura ondokoa da:

$$x_i det(A)$$

Adibidea. Azter dezagun hurrengo sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Alde batetik sistemaren koefizienteen matrizearen determinantea -3 da beraz Cramerren sistema da. Ondorioz bateragarri determinatua da eta soluzioa:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = -1/3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = 1/3$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = 2/3$$

■

5.3 Matrize Baten Heinaren Kalkulua Determinanteen Bidez

Definizioa 5.3.1. *Izan bedi $A \in M_{m\times n}(K)$. Demagun $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., m\}$ eta $j_1, ..., j_s \in \{1, ..., n\}$. Orduan hurrengo matrizea A-ren* **azpimatrizea** *deitzen da.*

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & \cdots & a_{i_rj_s} \end{pmatrix}$$

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ matrizea. Aukera ditzagun: 1. eta 3. herrenkadak eta 1., 3. eta 4. zutabeak. Orduan A-ren azpimatrizea hurrengoa da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

■

Definizioa 5.3.2. *Azpimatrize karratu, $r = s$, baten determinantea* **minorea** *deitzen da. Eta minorearen* **ordena** *azpimatrizearen ordena da.*

Teorema 5.3.3. *Matrize baten heina bere minore ez-nuluen ordenen maximoa da. Hau da $rg(A) = r$ da baldin eta soilik baldin existitzen bada r ordenako minore ez-nulu bat eta $r + 1$ ordenado minore guztiak nuluak badira.*

Adibidea. Kalkula dezagun $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

4 ordenako minore bakarra dago: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (laugarren herrenkadako elementuez garaztuz).

3 ordenako minoreen artean badago bat, $1., 2.$ eta 4. herrenkadak eta $1., 2.$ eta 4. zutabeak osatzen duten azpimatrizearen determinantea, non determinantea -2 den.

Beraz, hasierako matrizearen heina 3 da.

■

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia