5. Gaia 5

Matrize Karratu Baten Determinantearen Definizioa eta Propietateak

[1]

Definizioa 5.0.1. *Izan bedi $A \in M_n(IK)$ matrize karratua. A-ren* `determinantea`*, det(A) edo $|A|$ denotatuko duguna, honela definitzen da:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,(1)\sigma} ... a_{1,(1)\sigma}$$

Ohartu $\det(A)$ IK gorputzeko elementua dela. Gainera $a_{1,(1)\sigma}...a_{1,(1)\sigma}$ batugai bakoitzen A-ren herrenkada zein zutabe bakoitzeko elementu bat (eta bakar bat) agertzen da.

Adibidea. 1.- $n = 2$ bada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ da eta $\det(A)$=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ da.

2.- $n = 3$ bada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ da eta $\det(A)$=$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ da.

3.- $\det(I_n)$=1 da. Izan ere $\sigma \neq 1$ bada existitzen da $i \in X$ non $(i)\sigma \neq i$. Orduan $a_{i,(i)\sigma} = 0$, elementu hau matrizearen diagonaletik kanpo dagoelako. Ondorioz $a_{1,(1)\sigma}...a_{n,(n)\sigma} = 0$ $\sigma \neq 1$ guztietarako eta $\det(I_n)$=$a_{11}...a_{nn} = 1$ da.

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

4.- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ matrize diagonala bada det(A)=$\lambda_1 \cdots \lambda_n$ da. ■

Determinantearen oinarrizko propietateak hurrengo teoreman biltzen ditugu:

Teorema 5.0.2. *Matrize baten determinanteak ondoko propietateak betetzen ditu:*

*1.- A matrizeak bi herrenkada edo bi zutabe berdinak baditu orduan det(A)=*0 *da.*

2.- Transformazio elementalen eragina determinantean:

2.1- Matrize batean bi herrenkada (edo bi zutabe) elkartrukatzen badira orduan determinantearen zeinua aldatu egiten da.

2.2- A-ren herrenkada (zutabe) bat eskalar batez biderkatzen bada orduan determinantea ere eskalar horretaz biderkatuta geratzen da.

2.3- Herrenkada (zutabe) bati gainontzeko herrenkaden (zutabeen) konbinazio lineal bat batzen bazaio determinantearen balioa ez da aldatzen

3.- $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Antzeko propietatea betezen da zutabeekin.

Teorema 5.0.3. *de(^tA)=det(A).*

Teorema 5.0.4. *det(AB)=det(A)det(B).*

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia