5. Gaia 5

Talde Simetrikoa

[1]

Gogoratu, $X = \{1, ..., n\}$ bada, X-tik X-rako aplikazio bijektiboen multzoa taldea dela konposizioarekiko. Talde hau, n**. mailako talde simetrikoa** deitzen da eta S_n moduan adieraziko dugu. S_n-ko elementuak **permutazioak** deitzen dira.

Notazio aldaketa:

1.-S_n-ko permutazioak adierazteko modu berezia dago:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & a & \cdots & n \\ (1)\sigma & (2)\sigma & (3)\sigma & \cdots & (a)\sigma & \cdots & n \end{pmatrix}$$

2.-S_n-ko eragiketa adierazteko notazio biderkakorra erabiltzen da berezitasun honekin:

$$\sigma, \tau \in S_n, (a)(\sigma\tau) = ((a)\sigma)\tau$$

Definizioa 5.0.1. *$\sigma \in S_n$ permutazio bat* `r-zikloa` *dela esango dugu baldin eta r zenbaki ziklikoki mugitu eta beste $n - r$ zenbakiak finkatzen baditu. Hau da, existizen badira $a_1, ..., a_r \in X$ non:*

(i) $(a)\sigma = a, a \neq a_1, ..., a_r$ *bada;*

(ii) $(a_1)\sigma = a_2, (a_2)\sigma = a_3, ..., (a_{r-1})\sigma = a_r, (a_r)\sigma = a_1$.

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Orduan $\sigma = (a_1 ... a_r)$ idatziko dugu.

Adibidea. 1.- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ 2-zikloa da.

2.- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ 3-zikloa da.

3.- $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ denak dira zikloak.

4.- S_4-ko elementu batzuk ez dira zikloak. ∎

Ohartu r-ziklo bat adierazteko mudu desberdinak ditugula, halaber:

$$(a_1 a_2 ... a_{r-1} a_r) = (a_2 a_3 ... a_r a_1) = ... = (a_r a_1 ... a_{r-2} a_{r-1})$$

Definizioa 5.0.2. *Bi ziklo $(a_1 ... a_r)$ eta $(b_1 ... b_r)$* `disjuntuak` *direla esaten dugu elementu komunik ez badute, hau da, $\{a_1, ..., a_r\} \cap \{b_1, ..., b_r\} = \emptyset$ bada.*

S_4 kasuan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ ez da ziklo bat baina hala ere bi ziklo disjutuen biderkadura gisa adierazi ahal da, $\sigma = (12)(34)$. Gure helburua hau edozein permutazioekin gertatzen dela frogatzea da.

Izan bedi $\sigma \in S_n$ permutazio bat eta demagun ziklo disjuntuen biderkadura moduan deskonposatu nahi dugula. Ikus dezagun adibide baten bidez nola egiten den hau

Adibidea. Deskonposatu ziklo disjuntuen biderkadura moduan hurrengo permutazioa:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Pausuak:

(i) 1-etik hasi eta bilatu $(a)\sigma \neq a$ betetzen duen lehenengo zenbakia: Adibidean, 1.

(ii) Zenbaki horrekin $(a (a)\sigma ((a)\sigma)\sigma ...)$ zikloa osatu: Adibidean, (1632).

(iii) Behin eta berriz, lehengo pausua errepikatu bigarren pausuan agertu ez den hurrengo zenbakiarekin: Adibidean, (58).

(iv) Aurreko pausuetan agertu ez diren zenbakiak, permutazioak finko mantentzen ditu.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Ondorioz gure permutazioa lortutako ziklo disjutuen biderkadura izango da: $\sigma = (1632)(58)$. Nabaria da deskonposizioa bakarra dela zikloen ordena kontuan hartzen ez badugu. ■

Aurrekoa hurrengo teoremaren bidez idatziko dugu.

Teorema 5.0.3. *S_n-ko edozein permutazio ziklo disjuntuen biderkadura gisa deskonposatu ahal da. Gainera, deskonposizio hau bakarra zikloen ordena ez badugu kontuan hartzen.*

Definizioa 5.0.4. *Izan bedi $\tau \in S_n$. Orduan, τ* `trasposizioa` *dela esaten da 2-zikloa bada, hau da, existizen badira $i, j \in \{1, ..., n\}$ desberdinak non $\tau = (ij)$ den.*

Argi eta garbi $\tau = (ij)$ bada $o(\tau) = 2$ eta $\tau^{-1} = \tau$ da.

Teorema 5.0.5. *S_n-ko edozein permutazioa trasposizioen biderkadura gisa adieraz daiteke.*

Frogapena. Permutazio guztiak ziklo disjuntuetako biderkadura gisa adierazi ahal dira. Gainera r-ziklo bat era honetan deskonposatu ahal dugu:

$$(a_1...a_r) = (a_r a_{r-1})(a_{r-1} a_{r-2})...(a_3 a_2)(a_2 a_1)$$

■

Zer esan daiteke bakartasunari buruz? Oro ar ez dela bakarra. Adibidez,

$$(123) = (32)(21) = (12)(13) = (12)(13)(23)(23) = (14)(12)(24)(13)$$

Teorema 5.0.6. *Izan bedi $\sigma \in S_n$. Orduan, σ-ren trasposizioetako desponposizio guztietan, trasposizioen kopurua beti bakoitia ala bestela beti bikoitia da.*

Definizioa 5.0.7. *Izan bedi $\sigma \in S_n$. Orduan σ permutazio* `bakoitia` *edo* `bikoitia` *dela esaten dugu trasposizio koputu bakoiti edo bikoiti baten biderkadura gisa deskonposatzen den arabera. Gainera σ-ren* `signatura`, *$\varepsilon(\sigma)$ denotatuko duguna, honela definituko dugu:*

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ bikoitia bada,} \\ -1 & \text{beste kasuan.} \end{cases}$$

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

Ohartu $\sigma = \tau_1 ... \tau_r$ trasposizioetako deskonposizio bat bada orduan $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$ dela.

Adibidea.

(i) $1 = (12)(21)$ denez, $\varepsilon(1) = 1$ da.

(ii) Trasposizio baten signatura -1 da.

(iii) Baldin eta $\sigma = (a_1 ... a_r)$ r-zikloa bada orduan $\sigma = (a_r a_{r-1})(a_{r-1} a_{r-2}) ... (a_2 a_1)$ da eta beraz $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{r-1}$ da. ■

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia