5. Gaia 5

Determinanteak

[1]

5.1 Talde Simetrikoa

Gogoratu, $X = \{1, ..., n\}$ bada, X-tik X-rako aplikazio bijektiboen multzoa taldea dela konposizioarekiko. Talde hau, n**. mailako talde simetrikoa** deitzen da eta S_n moduan adieraziko dugu. S_n-ko elementuak **permutazioak** deitzen dira.

Notazio aldaketa:

1.-S_n-ko permutazioak adierazteko modu berezia dago:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & a & \cdots & n \\ (1)\sigma & (2)\sigma & (3)\sigma & \cdots & (a)\sigma & \cdots & n \end{pmatrix}$$

2.-S_n-ko eragiketa adierazteko notazio biderkakorra erabiltzen da berezitasun honekin:

$$\sigma, \tau \in S_n, (a)(\sigma\tau) = ((a)\sigma)\tau$$

Definizioa 5.1.1. *$\sigma \in S_n$ permutazio bat* `r-zikloa` *dela esango dugu baldin eta r zenbaki ziklikoki mugitu eta beste $n - r$ zenbakiak finkatzen baditu. Hau da, existizen badira $a_1, ..., a_r \in X$ non:*

(i) $(a)\sigma = a, a \neq a_1, ..., a_r$ *bada;*

(ii) $(a_1)\sigma = a_2, (a_2)\sigma = a_3, ..., (a_{r-1})\sigma = a_r, (a_r)\sigma = a_1$.

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Orduan $\sigma = (a_1...a_r)$ idatziko dugu.

Adibidea. 1.- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ 2-zikloa da.

2.- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ 3-zikloa da.

3.- $S_3 = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ denak dira zikloak.

4.- S_4-ko elementu batzuk ez dira zikloak. ■

Ohartu r-ziklo bat adierazteko mudu desberdinak ditugula, halaber:

$$(a_1a_2...a_{r-1}a_r) = (a_2a_3...a_ra_1) = ... = (a_ra_1...a_{r-2}a_{r-1})$$

Definizioa 5.1.2. *Bi ziklo $(a_1...a_r)$ eta $(b_1...b_r)$* `disjuntuak` *direla esaten dugu elementu komunik ez badute, hau da, $\{a_1, ..., a_r\} \cap \{b_1, ..., b_r\} = \emptyset$ bada.*

S_4 kasuan $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ ez da ziklo bat baina hala ere bi ziklo disjutuen biderkadura gisa adierazi ahal da, $\sigma = (12)(34)$. Gure helburua hau edozein permutazioekin gertatzen dela frogatzea da.

Izan bedi $\sigma \in S_n$ permutazio bat eta demagun ziklo disjuntuen biderkadura moduan deskonposatu nahi dugula. Ikus dezagun adibide baten bidez nola egiten den hau

Adibidea. Deskonposatu ziklo disjuntuen biderkadura moduan hurrengo permutazioa:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Pausuak:

(i) 1-etik hasi eta bilatu $(a)\sigma \neq a$ betetzen duen lehenengo zenbakia: Adibidean, 1.

(ii) Zenbaki horrekin $(a(a)\sigma((a)\sigma)\sigma...)$ zikloa osatu: Adibidean, (1632).

(iii) Behin eta berriz, lehengo pausua errepikatu bigarren pausuan agertu ez den hurrengo zenbakiarekin: Adibidean, (58).

(iv) Aurreko pausuetan agertu ez diren zenbakiak, permutazioak finko mantentzen ditu.

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Ondorioz gure permutazioa lortutako ziklo disjutuen biderkadura izango da: $\sigma = (1632)(58)$. Nabaria da deskonposizioa bakarra dela zikloen ordena kontuan hartzen ez badugu. ■

Aurrekoa hurrengo teoremaren bidez idatziko dugu.

Teorema 5.1.3. *S_n-ko edozein permutazio ziklo disjuntuen biderkadura gisa deskonposatu ahal da. Gainera, deskonposizio hau bakarra zikloen ordena ez badugu kontuan hartzen.*

Definizioa 5.1.4. *Izan bedi $\tau \in S_n$. Orduan, τ* `trasposizioa` *dela esaten da 2-zikloa bada, hau da, existizen badira $i, j \in \{1, ..., n\}$ desberdinak non $\tau = (ij)$ den.*

Argi eta garbi $\tau = (ij)$ bada $o(\tau) = 2$ eta $\tau^{-1} = \tau$ da.

Teorema 5.1.5. *S_n-ko edozein permutazioa trasposizioen biderkadura gisa adieraz daiteke.*

Frogapena. Permutazio guztiak ziklo disjuntuetako biderkadura gisa adierazi ahal dira. Gainera r-ziklo bat era honetan deskonposatu ahal dugu:

$$(a_1...a_r) = (a_r a_{r-1})(a_{r-1}a_{r-2})...(a_3a_2)(a_2a_1)$$

■

Zer esan daiteke bakartasunari buruz? Oro ar ez dela bakarra. Adibidez,

$$(123) = (32)(21) = (12)(13) = (12)(13)(23)(23) = (14)(12)(24)(13)$$

Teorema 5.1.6. *Izan bedi $\sigma \in S_n$. Orduan, σ-ren trasposizioetako desponposizio guztietan, trasposizioen kopurua beti bakoitia ala bestela beti bikoitia da.*

Definizioa 5.1.7. *Izan bedi $\sigma \in S_n$. Orduan σ permutazio* `bakoitia` *edo* `bikoitia` *dela esaten dugu trasposizio koputu bakoiti edo bikoiti baten biderkadura gisa deskonposatzen den arabera. Gainera σ-ren* `signatura`*, $\varepsilon(\sigma)$ denotatuko duguna, honela definituko dugu:*

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \text{ bikoitia bada,} \\ -1 & \text{beste kasuan.} \end{cases}$$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

Ohartu $\sigma = \tau_1...\tau_r$ trasposizioetako deskonposizio bat bada orduan $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$ dela.

Adibidea.

(i) $1 = (12)(21)$ denez, $\varepsilon(1) = 1$ da.

(ii) Trasposizio baten signatura -1 da.

(iii) Baldin eta $\sigma = (a_1...a_r)$ r-zikloa bada orduan $\sigma = (a_r a_{r-1})(a_{r-1}a_{r-2})...(a_2 a_1)$ da eta beraz $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{r-1}$ da. ■

5.2 Matrize Karratu Baten Determinantea

Definizioa 5.2.1. *Izan bedi $A \in M_n(IK)$ matrize karratua. A-ren* `determinantea`*, det(A) edo $|A|$ denotatuko duguna, honela definitzen da:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,(1)\sigma}...a_{1,(1)\sigma}$$

Ohartu $\det(A)$ IK gorputzeko elementua dela. Gainera $a_{1,(1)\sigma}...a_{1,(1)\sigma}$ batugai bakoitzen A-ren herrenkada zein zutabe bakoitzeko elementu bat (eta bakar bat) agertzen da.

Adibidea. 1.- $n = 2$ bada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ da eta $\det(A)$=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ da.

2.- $n = 3$ bada $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ da eta $\det(A)$=$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ da.

3.- $\det(I_n)$=1 da. Izan ere $\sigma \neq 1$ bada existitzen da $i \in X$ non $(i)\sigma \neq i$. Orduan $a_{i,(i)\sigma} = 0$, elementu hau matrizearen diagonaletik kanpo dagoelako. Ondorioz $a_{1,(1)\sigma}...a_{n,(n)\sigma} = 0$ $\sigma \neq 1$ guztietarako eta $\det(I_n)$=$a_{11}...a_{nn} = 1$ da.

4.- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ matrize diagonala bada $\det(A)$=$\lambda_1 \cdots \lambda_n$ da. ■

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

Determinantearen oinarrizko propietateak hurrengo teoreman biltzen ditugu:

Teorema 5.2.2. *Matrize baten determinanteak ondoko propietateak betetzen ditu:*

1.- A matrizeak bi herrenkada edo bi zutabe berdinak baditu orduan det(A)=0 da.

2.- Transformazio elementalen eragina determinantean:

2.1- Matrize batean bi herrenkada (edo bi zutabe) elkartrukatzen badira orduan determinantearen zeinua aldatu egiten da.

2.2- A-ren herrenkada (zutabe) bat eskalar batez biderkatzen bada orduan determinantea ere eskalar horretaz biderkatuta geratzen da.

2.3- Herrenkada (zutabe) bati gainontzeko herrenkaden (zutabeen) konbinazio lineal bat batzen bazaio determinantearen balioa ez da aldatzen

3.- $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Antzeko propietatea betezen da zutabeekin.

Teorema 5.2.3. *de(^tA)=det(A).*

Teorema 5.2.4. *det(AB)=det(A)det(B).*

[5]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[6]

5.3 Determinantearen Garapena Herrenkada edo Zutabe Baten Elementuez

Definizioa 5.3.1. *Izan bedi $A \in M_n(IK)$ matrizea. a_{ij} elementuaren* **adjuntua**, *A_{ij} moduan adierazten duguna hurrengo balioa da:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(Ohartu azkenengo determinantean agertzen den matrizea A matrizeari i. herrenkada eta j. zutabea kenduz lortzen dela, a_{ij} elementua aurkitzen deneko lerroa eta zutabea hain zuzen ere.)

Teorema 5.3.2. *(i)(Determinantearen garapena i. herrenkadado elementuak erabiliz)*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

(ii)(Determinantearen garapena j. zutabeko elementuak erabiliz)

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Adibidea. Aurreko teoremako garapenaren bitartez, hurrengo determinantearen balioa kalkulatu ahal dugu (era honetako determinante bati **Vandermonderen determinantea** esaten zaio):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

(Argibidea: Determinante honetan $A_(i) \rightarrow A_(i) - x_1A_(i-1), i = n, n-1, ..., 2$ aldaketak eginez n ordenako eta $n-1$ ordenako determinanteen arteko

[6] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[7]

erlazio bat lortzen da. Erlazio horretan oinarrituz eta n gaineko indukzioa erabiliz frogatzen da emandako formula.)

■

Definizioa 5.3.3. *$A \in M_n(IK)$ bada , A-ren* **matrize adjuntua**, *$adj(A)$ denotatuko duguna, A-ko elementuen adjuntuek osatutakoa da: $adj(A) = (A_{ij}) \in M_n(IK)$.*

Teorema 5.3.4. *Izan bedi $A \in M_n(IK)$. Orduan:*

$$A \in GL_n(IK) \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Gainera, kasu horretan $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t(adj(A))$ da.

5.4 Cramerren Sistemak

Definizioa 5.4.1. *n ekuazio linealeko eta n ezezaguneko sistema bat,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Cramerren sistema *deitzen da $det(A) \neq 0$ bada. (Hau da A alderanzgarria edo $rg(A) = n$ bada.)*

Teorema 5.4.2 (Cramerren Erregela)**.** *Izan bedi $AX = B$ Cramerren sistema bat. Orduan sistema bateragarri determinatua da eta soluzioa:*

$$\frac{x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{det(A), i = 1, ..., n}$$

Frogapena 5.4.3. $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Determinantearen propietateak erabiliz azken determinatea hurrengoaren berdina da:

[7] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[8]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11}x_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1}x_1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ohartu determinante guztietan x_j kanpora atera ahal dugula eta i. batugaian izan ezik beste determinanteak nuluak dira kasu horietan matrizea bi zutabe berdinak bait ditu. Ondorioz aurreko batura ondokoa da:

$$x_i det(A)$$

Adibidea. Azter dezagun hurrengo sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases}$$

Alde batetik sistemaren koefizienteen matrizearen determinantea -3 da beraz Cramerren sistema da. Ondorioz bateragarri determinatua da eta soluzioa:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = -1/3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = 1/3$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-3} = 2/3$$

■

[8]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[9]

5.5 Matrize Baten Heinaren Kalkulua Determinanteen Bidez

Definizioa 5.5.1. *Izan bedi $A \in M_{m\times n}(K)$. Demagun $i_1, ..., i_r \in \{1, ..., m\}$ eta $j_1, ..., j_s \in \{1, ..., n\}$. Orduan hurrengo matrizea A-ren* **azpimatrizea** *deitzen da.*

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \cdots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}$$

Adibidea. Izan bedi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ matrizea. Aukera ditzagun: 1. eta 3. herrenkadak eta 1., 3. eta 4. zutabeak. Orduan A-ren azpimatrizea hurrengoa da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

■

Definizioa 5.5.2. *Azpimatrize karratu, $r = s$, baten determinantea* **minorea** *deitzen da. Eta minorearen* **ordena** *azpimatrizearen ordena da.*

Teorema 5.5.3. *Matrize baten heina bere minore ez-nuluen ordenen maximoa da. Hau da $rg(A) = r$ da baldin eta soilik baldin existitzen bada r ordenako minore ez-nulu bat eta $r + 1$ ordenado minore guztiak nuluak badira.*

Adibidea. Kalkula dezagun $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrizearen heina.

4 ordenako minore bakarra dago: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (laugarren herrenkadako elementuez garaztuz).

[9] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[10]

3 ordenako minoreen artean badago bat, 1., 2. eta 4. herrenkadak eta 1., 2. eta 4. zutabeak osatzen duten azpimatrizearen determinantea, non determinantea -2 den.

Beraz, hasierako matrizearen heina 3 da.

■

[10] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia