4. Gaia 4

Ekuazio Linealetako Sistemak

[1]

Definizioa 4.0.1. *Ekuazio linealetako sistema mat, m ekuazio eta n ezezagunekin, hurrengoa da:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Non $a_{ij}, b_j \in IK$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Matrizialki adierazita $AX = B$ da non:

$A = (a_{ij})$ **sistemaren matrizea** *deitzen da.*

$B = (b_j)$ **gai askeen matrizea** *deitzen da.*

$X = (x_i)$ **ezezagunen matrizea** *deitzen da.*

$(A|B)$ **sistemaren matrize hedatua** *deitzen da.*

Definizioa 4.0.2. *Izan bedi $AX = B$ ekuazioa linealetako sistema bat. $\alpha = (\alpha_i)$ matrizea sistemaren* **soluzioa** *dela esaten da baldin eta $A\alpha = B$ betetzen bada.*

Definizioa 4.0.3. *$AX = B$ soluziorik ez badu* **bateraezina** *deitzen da eta beste kasuan* **bateragarria**. *Azkenengo kasuan:*

1.- Sistemak soluzio bakarra badu **bateragarri determinatua** *deitzen da.*

2.- Beste kasuan, **bateragarri indeterminatua**.

Ohartu $AX = 0$ moduko sistemak, **homogeneoak** deitzen dira, beti bateragarriak direla (0) soluzioa baita.

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Teorema 4.0.4. *(Rouche-Frobenius) Izan bedi $AX = B$ ekuazio linealetako sistema. Orduan sistema bateragarria da baldin eta soilik baldin rg(A)=rg$(A|B)$ betetzen bada.*

Frogapena. $AX = B$ soluzioa du $\Leftrightarrow \exists\alpha = (\alpha_i)$ non $A\alpha = B$ den $\Leftrightarrow \exists\alpha_1, ..., \alpha_n$ non $\alpha_1 A^{(1)} + ... + \alpha_n A^{(n)} = B$ betetzen den $\Leftrightarrow \langle A^{(1)}, ..., A^{(n)}\rangle = \langle A^{(1)}, ..., A^{(n)}, B\rangle$ betetzen da $\Leftrightarrow$ dim$\langle A^{(1)}, ..., A^{(n)}\rangle$=dim$\langle A^{(1)}, ..., A^{(n)}, B\rangle$. ■

Teorema 4.0.5. *Izan bedi $AX = B$ ekuazio linealetako sistema bateragarria. Definitzen dugu hurrengo aplikazio lineala:*

$$\begin{array}{rcccc} \varphi & : & M_{n\times 1}(IK) & \rightarrow & M_{m\times 1}(IK) \\ & & X & \mapsto & AX \end{array}$$

Orduan

1.- $AX = 0$ sistemaren soluzioen multzoa Kerφ da. Ondorioz sistema homogeneoaren soluzioen multzoa azpiespazio bektoriala da.

2.- Demagun v_0 $AX = B$ sistemaren soluzio partikularra dela. Orduan $AX = B$ sistemaren soluzioen multzoa v_0+Kerφ da.

Frogapena.

1.- Ker$\varphi = \{X \quad | \quad \varphi(X) = (0)\} = \{X \quad | \quad AX = 0\}$.

2.- Izan bedi v $AX = B$ sistemaren beste soluzio bat. Ikus dezagun $v - v_0$ Kerφ azpespazioan dagoela. v eta v_0 sistema beraren soluzioak direnez $A(v - v_0) = Av - Av_0 = B - B = 0$. Beraz, aurreko atalaren arabera nukleoan dago. Bestalde, izan bedi $v_0 + \alpha$ v_0+Kerφ multzoko bektore bat. Ikus dezagun bektore hau $AX = B$ sistemaren soluzioa dela. $A(v_0 + \alpha) = Av_0 + A\alpha = B + 0 = B$. ■

Oharra 4.0.6. *Izan bedi $AX = B$ sistema bateragarria. Orduan, aurreko teoremaren arabera, $AX = B$ determinatua izango da baldin eta soilik baldin Ker$\varphi = \{0\}$ bada. Hau da baldin eta soilik baldin dimKerφ=dim$M_{n\times 1}(IK)$-dimImφ=0 bada. Honen baliokidea, n =rg(A) berdintza da. Beste kasuan, bateragarri indeterminatua izango da.*

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia