1. Gaia 5

Aplikazio Lineal Baten Heina. Matrize Baten Heina

[1]

Definizioa 5.0.1. *Izan bedi* $f \in L(V, V')$ *aplikazio lineala.* f**-ren heina**, $rg(f)$ *denotatuko duguna, Im*f *azpiespazioaren dimentsioa da.*

Gogoratu, $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ bada orduan $\mathrm{Im} f = f(V) = \langle f(v_1), ..., f(v_n) \rangle$ dela beraz $\mathrm{rg}(f) = \dim\langle f(v_1), ..., f(v_n) \rangle$ da.

Definizioa 5.0.2. *Izan bedi* $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(IK)$ *matrizea. Denotatzen dugu:*

(i) $A_{(i)} = (a_{i1} \vdots a_{in})$ *A-ren* i **garren lerroa**, $1 \leq i \leq m$.

(ii) $A^{(j)} = (a_{1j} \vdots a_{mj})$ *A-ren* j **garren zutabea**, $1 \leq j \leq n$. *Froga daiteke* $dim\langle A_{(1)}, ..., A_{(m)} \rangle = dim\langle A^{(1)}, ..., A^{(n)} \rangle$ *dela. Balio amankomun hau A-ren* **heina** *deitzen da eta* $rg(A)$ *moduan adieraziko dugu.*

Adibidea. 1.- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$

2.- $\mathrm{rg}(I_n) = n.$

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

3.- $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r.$ ■

Teorema 5.0.3. *Izan bitez V eta V' n eta m dimentsioko IK espazio bektorialak, β_V eta $\beta_{V'}$ V eta V' en oinarriak izanik. Orduan:*

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f).$$

Frogapena. Demagun $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{v_1', ..., v_m'\}$ direla. Definitzen dugu hurrengo aplikazioa:

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & V' & \rightarrow & M_{m\times 1}(IK) \\ & & v_1' & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & v_m' & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Argi eta garbi φ isomorfismoa da. Bestalde, $\mathrm{rg}(f) = \dim\langle f(v_1), ..., f(v_m)\rangle$ da. $\langle f(v_1), ..., f(v_m)\rangle$ V'en azpiespazioa denez eta φ aplikazio lineala:

$$\varphi(\langle f(v_1), ..., f(v_m)\rangle) = \langle \varphi(f(v_1)), ..., \varphi(f(v_m))\rangle$$

eta hau $M_{m\times 1}(IK)$-ren azpiespazioa da. Baina φ isomorfismoa denez azpiespazioen dimentsioa mantentzen da. Beraz, $\mathrm{rg}(f) = \dim\langle \varphi(f(v_1)), ..., \varphi(f(v_m))\rangle$ da. φ aplikazioaren definizioa begiratzen badugu azken azpiespazio hau $M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$ matrizearen zutabeek osatzen duten azpiespazioa da beraz dimentsioa elkartutako matrizearen heina da. ■

Ondorioa 5.0.4. *Izan bedi $f \in L(V, V')$ r heineko aplikazio lineala. Orduan f-ri elkartutako matrize guztiak r heinekoak dira.*

Teorema 5.0.5. *Izan bedi $f \in L(V, V')$ r heineko aplikazio lineala. Orduan existitzen dira β_V eta $\beta_{V'}$ V eta V' en oinarriak non:*

$$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Frogapena. Demagun dim$V = n$ dela. Orduan dimKer$f$=dim$V$-dimImf=$n-r$. Izan bedi $\beta_{Kerf} = \{v_{r+1}, ..., v_n\}$ Ker$f$-ren oinarri bat. Luzatzen dugu V-ren oinarri bateraino $\beta_V = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ lortuz, ohartu Ker$f$-ko oinarria osatzen duten bektoreak bukaeran jarri ditugula!!!

Gogoratu $\{f(v_1), ..., f(v_r), f(v_{r+1}), ..., f(v_n)\}$ Imf-ren sistema sortzailea dela. Kasu honetan, $v_{r+1}, ..., v_n$ Ker$f$-ko betoreak direnez $\{f(v_1), ..., f(v_r)\}$ bektore sistema izango dugu. f-ren heina r denez sistema sortzailea izateaz gain Imf-ren oinarria da. Luzatzen dugu $V^{'}$-en oinarri bateraino $\beta_{V'} = \{f(v_1), ..., f(v_r), v^{'}_{r+1}, ..., v^{'}_m\}$ lortuz, ohartu Imf-ren oinarria osatzen duten bektoreak hasieran jarri ditugula!!.

Orduan lortu ditugu:

$$\beta_V = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\} \quad \beta_{V'} = \{f(v_1), ..., f(v_r), v^{'}_{r+1}, ..., v^{'}_m\}$$

V eta $V^{'}$ oinarriak non elkartutako matrizea $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ den. $\blacksquare$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia