1. Gaia 5

Ekuazio Linealetako Sistemak

[1]

5.1 Aplikazio Lineal Baten Heina. Matrize Baten Heina

Definizioa 5.1.1. *Izan bedi $f \in L(V, V')$ aplikazio lineala.* **f-ren heina**, *$rg(f)$ denotatuko duguna, Imf azpiespazioaren dimentsioa da.*

Gogoratu, $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ bada orduan $\mathrm{Im}f = f(V) = \langle f(v_1), ..., f(v_n) \rangle$ dela beraz $\mathrm{rg}(f) = \dim \langle f(v_1), ..., f(v_n) \rangle$ da.

Definizioa 5.1.2. *Izan bedi $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(IK)$ matrizea. Denotatzen dugu:*

(i) $A_{(i)} = (a_{i1} \vdots a_{in})$ *A-ren i* **garren lerroa**, $1 \leq i \leq m$.

(ii) $A^{(j)} = (a_{1j} \vdots a_{mj})$ *A-ren j* **garren zutabea**, $1 \leq j \leq n$. *Froga daiteke $dim \langle A_{(1)}, ..., A_{(m)} \rangle = dim \langle A^{(1)}, ..., A^{(n)} \rangle$ dela. Balio amankomun hau A-ren* **heina** *deitzen da eta $rg(A)$ moduan adieraziko dugu.*

Adibidea. 1.- $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$

2.- $\mathrm{rg}(I_n) = n.$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

3.- $\text{rg}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = r$. ■

Teorema 5.1.3. *Izan bitez V eta V' n eta m dimentsioko IK espazio bektorialak, β_V eta $\beta_{V'}$ V eta V' en oinarriak izanik. Orduan:*

$$\text{rg}(f) = \text{rg}M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f).$$

Frogapena. Demagun $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{v_1', ..., v_m'\}$ direla. Definitzen dugu hurrengo aplikazioa:

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & V' & \rightarrow & M_{m\times 1}(IK) \\ & & v_1' & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & v_m' & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Argi eta garbi φ isomorfismoa da. Bestalde, $\text{rg}(f)$ =$\dim\langle f(v_1), ..., f(v_m)\rangle$ da. $\langle f(v_1), ..., f(v_m)\rangle$ V'en azpiespazioa denez eta φ aplikazio lineala:

$$\varphi(\langle f(v_1), ..., f(v_m)\rangle) = \langle \varphi(f(v_1)), ..., \varphi(f(v_m))\rangle$$

eta hau $M_{m\times 1}(IK)$-ren azpiespazioa da. Baina φ isomorfismoa denez azpiespazioen dimentsioa mantentzen da. Beraz, $\text{rg}(f)$=$\dim\langle \varphi(f(v_1)), ..., \varphi(f(v_m))\rangle$ da. φ aplikazioaren definizioa begiratzen badugu azken azpiespazio hau $M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$ matrizearen zutabeek osatzen duten azpiespazioa da beraz dimentsioa elkartutako matrizearen heina da. ■

Ondorioa 5.1.4. *Izan bedi $f \in L(V, V')$ r heineko aplikazio lineala. Orduan f-ri elkartutako matrize guztiak r heinekoak dira.*

Teorema 5.1.5. *Izan bedi $f \in L(V, V')$ r heineko aplikazio lineala. Orduan existitzen dira β_V eta $\beta_{V'}$ V eta V' en oinarriak non:*

$$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Frogapena. Demagun dim$V = n$ dela. Orduan dimKer$f$=dim$V$-dimImf=$n-r$. Izan bedi $\beta_{Kerf} = \{v_{r+1}, ..., v_n\}$ Ker$f$-ren oinarri bat. Luzatzen dugu V-ren oinarri bateraino $\beta_V = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ lortuz, ohartu Ker$f$-ko oinarria osatzen duten bektoreak bukaeran jarri ditugula!!!

Gogoratu $\{f(v_1), ..., f(v_r), f(v_{r+1}), ..., f(v_n)\}$ Imf-ren sistema sortzailea dela. Kasu honetan, $v_{r+1}, ..., v_n$ Ker$f$-ko betoreak direnez $\{f(v_1), ..., f(v_r)\}$ bektore sistema izango dugu. f-ren heina r denez sistema sortzailea izateaz gain Imf-ren oinarria da. Luzatzen dugu $V^{'}$-en oinarri bateraino $\beta_{V'} = \{f(v_1), ..., f(v_r), v^{'}_{r+1}, ..., v^{'}_m\}$ lortuz, ohartu Imf-ren oinarria osatzen duten bektoreak hasieran jarri ditugula!!.

Orduan lortu ditugu:

$$\beta_V = \{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\} \quad \beta_{V'} = \{f(v_1), ..., f(v_r), v^{'}_{r+1}, ..., v^{'}_m\}$$

V eta $V^{'}$ oinarriak non elkartutako matrizea $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ den. ∎

5.2 Oinarrizko Aldaketak

Izan bedi $\{v_1, ..., v_n\}$ V espazioaren sistema sortzailea. Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:

1.- $\{v_1, ..., v_n\}$ bektore sisteman v_i eta v_j bektoreak elkar trukatzen badira lortutako bektore sistema ere V-ren sistema sortzailea da.

2.- $\{v_1, ..., v_n\}$ bektore sisteman v_i bektorearen ordez bere multiplo ez nulu bat jartzen badugu, λv_i, $\lambda \neq 0$ izanik, lortutako bektore sistema ere V-ren sistema sortzailea da.

3.- $\{v_1, ..., v_n\}$ bektore sisteman v_i betkorearen ordez bektore hori gehi beste ezberdin baten multiploa jartzen badugu, $v_i + \lambda v_j$, lortutako bektore sistema ere V-ren sistema sortzailea da.

Aurreko hiru propietateak hurrengo egoeran aplikatuko ditugu. Izan bedi $A \in M_{m\times n}(IK)$ matrizea. $A_{(1)}, ..., A_{(m)}$ $\langle A_{(1)}, ..., A_{(m)}\rangle$ azpiespazioaren sistema sortzailea da eta $A^{(1)}, ..., A^{(n)}$ $\langle A^{(1)}, ..., A^{(n)}\rangle$ azpiespazioarena. Bi azpiespazio hauek dimentsio berdina dute eta hau A-ren heina da. Beraz, aurreko propietateen arabera:

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

(i) A matrizean bi lerro (zutabe) elkartrukatzen badira matrizearen heina ez da aldatzen.

(ii) A matrizean lerro (zutabe) baten ordez bere multiplo ez-nulu bat jartzen badugu matrizearen heina ez da aldatzen.

(iii) A matrizean lerro (zutabe) baten ordez lerro (zutabe) hori gehi beste ezberdin baten multiploa jartzen badugu matrizearen heina ez da aldatzen.

Aurreko (i), (ii) eta (iii) **oinarrizko aldaketak** edo transformazio elementalak deitzen dira.

Adibidea. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ matrizearen heina kalkulatuko dugu aurreko aldaketak erabiliz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Argi eta garbi, heinaren definizioa erabiliz, azken matrizearen heina 3 da beraz $\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} = 3.$

■

5.3 Ekuazio Linealetako Sistemak

Definizioa 5.3.1. *Ekuazio linealetako sistema mat, m ekuazio eta n ezezagunekin, hurrengoa da:*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

Non $a_{ij}, b_j \in IK$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Matrizialki adierazita $AX = B$ da non:

$A = (a_{ij})$ **sistemaren matrizea** *deitzen da.*

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

$B = (b_j)$ **gai askeen matrizea** *deitzen da.*

$X = (x_i)$ **ezezagunen matrizea** *deitzen da.*

$(A|B)$ **sistemaren matrize hedatua** *deitzen da.*

Definizioa 5.3.2. *Izan bedi $AX = B$ ekuazioa linealetako sistema bat. $\alpha = (\alpha_i)$ matrizea sistemaren* **soluzioa** *dela esaten da baldin eta $A\alpha = B$ betetzen bada.*

Definizioa 5.3.3. *$AX = B$ soluziorik ez badu* **bateraezina** *deitzen da eta beste kasuan* **bateragarria**. *Azkenengo kasuan:*

1.- Sistemak soluzio bakarra badu **bateragarri determinatua** *deitzen da.*

2.- Beste kasuan, **bateragarri indeterminatua**.

Ohartu $AX = 0$ moduko sistemak, **homogeneoak** deitzen dira, beti bateragarriak direla (0) soluzioa baita.

Teorema 5.3.4. *(Rouche-Frobenius) Izan bedi $AX = B$ ekuazio linealetako sistema. Orduan sistema bateragarria da baldin eta soilik baldin rg(A)=rg$(A|B)$ betetzen bada.*

Frogapena. $AX = B$ soluzioa du $\Leftrightarrow \exists \alpha = (\alpha_i)$ non $A\alpha = B$ den $\Leftrightarrow$ $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$ non $\alpha_1 A^{(1)} + ... + \alpha_n A^{(n)} = B$ betetzen den $\Leftrightarrow \langle A^{(1)}, ..., A^{(n)} \rangle = \langle A^{(1)}, ..., A^{(n)}, B \rangle$ betetzen da $\Leftrightarrow$ $\dim\langle A^{(1)}, ..., A^{(n)} \rangle = \dim\langle A^{(1)}, ..., A^{(n)}, B \rangle$. ■

Teorema 5.3.5. *Izan bedi $AX = B$ ekuazio linealetako sistema bateragarria. Definitzen dugu hurrengo aplikazio lineala:*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & M_{n\times 1}(IK) & \rightarrow & M_{m\times 1}(IK) \\ & X & \mapsto & AX \end{array}$$

Orduan

1.- $AX = 0$ sistemaren soluzioen multzoa Kerφ da. Ondorioz sistema homogeneoaren soluzioen multzoa azpiespazio bektoriala da.

2.- Demagun v_0 $AX = B$ sistemaren soluzio partikularra dela. Orduan $AX = B$ sistemaren soluzioen multzoa v_0+Kerφ da.

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[6]

Frogapena.

1.- $\mathrm{Ker}\varphi = \{X \quad | \quad \varphi(X) = (0)\} = \{X \quad | \quad AX = 0\}$.

2.- Izan bedi v $AX = B$ sistemaren beste soluzio bat. Ikus dezagun $v - v_0$ $\mathrm{Ker}\varphi$ azpespazioan dagoela. v eta v_0 sistema beraren soluzioak direnez $A(v - v_0) = Av - Av_0 = B - B = 0$. Beraz, aurreko atalaren arabera nukleoan dago. Bestalde, izan bedi $v_0 + \alpha$ $v_0 + \mathrm{Ker}\varphi$ multzoko bektore bat. Ikus dezagun bektore hau $AX = B$ sistemaren soluzioa dela. $A(v_0 + \alpha) = Av_0 + A\alpha = B + 0 = B$. ■

Oharra 5.3.6. *Izan bedi $AX = B$ sistema bateragarria. Orduan, aurreko teoremaren arabera, $AX = B$ determinatua izango da baldin eta soilik baldin $Ker\varphi = \{0\}$ bada. Hau da baldin eta soilik baldin dimKerφ=dim$M_{n\times 1}(IK)$-dimImφ=0 bada. Honen baliokidea, n =rg(A) berdintza da. Beste kasuan, bateragarri indeterminatua izango da.*

Izan bedi ondorengo ekuazio linealetako sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Sistema honetan hurrengo aldaketak egiten baditugu sistemaren soluzioa ez da aldatzen:

1.- Bi ekuazio elkartrukatzea.

2.- Ekuazio baten ordez bere multiplo ez nulua jartzea.

3.- Ekuazio baten ordez ekuazio hori gehi beste ezberdin baten multiploa jartzea.

Ondorioz, $(A|B)$ matrize hedatuan oinarrizko aldaketak lerroetan bakarrik erabiltzen baditugu matrize hedatu berriari lotutako sistema eta hasierako sistemak soluzio bera dute.

Adibidea. Izan bedi ondorengo sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

[6] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[7]

Sistemaren matrize hedatua $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ da. Aldaketak lerroetan bakarrik eginez hurrengo matrizera iristen gara:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Argi eta garbi rg(A)=rg($A|B$)=3 beraz sistema bateragarria da eta matrize hedatu honi lotutako sistema hurrengo da:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & - & 3x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

Orduan soluzioa $x_3 = 2/3, x_2 = 1/3$ eta $x_1 = -1/3$ da.

■

[7]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia