3. Gaia 3

Aplikazio Lineal Bati Elkartutako Matrizea

[1]

Izan bitez V ($\dim V = n$) eta $V^{'}$ ($\dim V^{'} = m$) IK espazio bektorialak eta $f : V \to V^{'}$ aplikazio lineala. Izan bitez $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta $V^{'}$en oinarriak hurrenez-hurren. Orduan $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ bektorea bada $f(v) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n)$. Matrizialki adierazita:

$$f(v) = (f(v_1)...f(v_n)) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dakigunez $f(v_i) \in V^{'}$ $i = 1, ..., n$ guztietarako beraz $\exists! a_{1i}, ..., a_{mi} \in IK$ non $f(v_i) = a_{1i} w_1 + ... + a_{mi} w_m$ betetzen den. Matrizialki adierazita:

$$f(v_i) = (w_1...w_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

Ondorioz:

$$f(v) = (w_1...w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definizioa 3.0.1. *Aurreko egoeran* $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *f-ri elkartutako matrizea β_V eta $\beta_{V'}$ oinarriekiko deitzen da eta denotatuko dugu $M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$.*

[1] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x,y,z) = (x - 3y, x+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ den.

1.- Izan bitez β_1 eta β_2 $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.- Izan bitez $\beta'_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ eta $\beta'_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{\beta'_1}^{\beta'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 3.0.2. *Izan bitez V eta V' dimentsio finituko espazio bektorialak, $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta V'en oinarriak izanik hurrenez-hurren. Orduan:*

1.- $f, g \in L(V, V')$ badira:

$$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f+g) = M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) + M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(g).$$

2.- $f \in L(V,V')$ eta $k \in IK$ badira:

$$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(kf) = kM_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$$

Frogapena. 1.- Frogatuko dugu, 2.- era berean frogatzen da.

$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f+g)$ matrizearen i zutabean $f(v_i) + g(v_i)$ bektorearen koordenatuak daude $\beta_{V'}$ oinarriarekiko. Baina koordenatu hauek $f(v_i)$-ren koordenatuei $g(v_i)$-renak batuz lortzen dira.

■

Teorema 3.0.3. *Izan bitez V eta V' dimentsio finituko espazio bektorialak, $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta V'en oinarriak izanik hurrenez-hurren. Definitzen dugu hurrengo aplikazioa:*

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & L(V,V') & \to & M_{m\times n}(IK) \\ & & f & \mapsto & M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) \end{array}$$

Orduan φ isomorfismo bat da.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Frogapena. Aurreko teoremak frogatzen digu φ aplikazio lineala dela.

φ injektiboa dela frogatzeko aplikazioaren nukleoa erabiliko dugu. $f \in$Ker φ baldin eta soilik baldin $M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) = (0)$ matrize nulua bada eta horretarako derrigorrezkoa da f aplikazio nulua izatea. Beraz, Ker$\varphi = \{0_{L(V,V')}\}$ eta honek injektiboa dela frogatzen digu.

φ supraiektiboa dela frogatuko dugu. Izan bedi $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(IK)$. Definitzen dugu $f : V \to V'$ aplikazio lineala datu hauekin: $f(v_i) = a_{1i}w_1 + ... + a_{mi}w_m$, $i = 1, ..., n$. Honekin f guztiz definiturik dago eta noski f-ri elkartutako matrizea oinarri horietan A da.

∎

Teorema 3.0.4. *Izan bitez V, V' eta Z dimentsio finituko espazio bektorialak, β_V, $\beta_{V'}$ eta β_Z V, V' eta Z-ren oinarriak izanik hurrenez-hurren. $f \in L(V, V')$ eta $g \in L(V', Z)$ badira hurrengoa betetzen da:*

1.- $g \circ f$ aplikazio lineala da V-tik Z-ra.

2.-
$$M_{\beta_V}^{\beta_Z}(g \circ f) = M_{\beta_{V'}}^{\beta_Z}(g) M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia