3. Gaia 3

Espazio Bektorialen Arteko Isomorfismoak

[1]

Definizioa 3.0.1. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala. f* **isomorfismoa** *dela esango dugu baldin eta f bijektiboa bada. $V = V'$ deneko kasuan isomorfismo bati* **automorfismoa** *ere deitzen zaio.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$, $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. orduan f isomorfismoa da eta gainera automorfismoa. ■

Definizioa 3.0.2. *Izan bitez V eta V' IK-espazio bektorialak. V eta V'* **isomorfoak** *direla esango dugu baldin eta existitzen bada V-tik V'erako f isomorfismo bat eta kasu honetan $V \cong V'$ moduan adieraziko dugu.*

Adibidea. 1.- $\mathbb{R}^4 \cong P_3(\mathbb{R})$ baina $\mathbb{R}^3 \ncong \mathbb{R}^4$.

2.- $\mathbb{R}^6 \cong M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

■

Teorema 3.0.3. *Izan bitez V eta V' dimentsio finituko IK espazio bektorialak. Orduan:*

$$V \cong V' \Leftrightarrow dimV = dimV'$$

Frogapena. $\Rightarrow$ Demagun $V \cong V'$ betetzen dela, orduan existitzen da $f : V \to V'$ isomorfismo bat. Beraz $\mathrm{Ker}f = \{0_V\}$ eta $\mathrm{Im}f = V'$ dira. Gainera $dimV = dim\mathrm{Ker}f + dim\mathrm{Im}f$ betetzen denez, $dimV = dimV'$ berdintza dugu.

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

$\Leftarrow$ Demagun $dimV = dimV'$ betetzen dela. Izan bitez $\{v_1, ..., v_n\}$ eta $\{u_1, ..., u_n\}$ V eta V'-en oinarriak hurrenez hurren. Izan bedi $f : V \rightarrow V'$ aplikazio lineala non $f(v_i) = u_i$ den $i = 1, .., n$. f bijektiboa dela frogatzen badugu teorema frogatuta izango dugu.

1.- f injektiboa: Izan bedi $v \in \mathrm{Ker}f$ bektorea. Orduan $v = k_1v_1 + ... + k_nv_n$ moduan adierazi ahal da eta $f(v) = 0_{V'}$. Beraz $k_1f(v_1) + ... + k_nf(v_n) = 0_{V'}$ betetzen da. Orduan $k_1u_1 + ... + k_nu_n = 0_{V'}$ dugu baina $\{u_1, ..., u_n\}$ V'-en oinarria denez $k_1 = ... = k_n = 0_{IK}$ da eta orduan $v = 0_V$.

2.- f supraiektiboa: $dimV = dim\mathrm{Ker}f + dim\mathrm{Im}f$ denez eta $\mathrm{Ker}f = \{O_V\}$ orduan $dimV = dim\mathrm{Im}f$ eta beraz $dimV' = dim\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Im}f \leq V'$ denez, $\mathrm{Im}f = V'$ dugu. ■

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia