3. Gaia 3

Aplikazio Lineal Baten Nukleoa eta Irudia

1

Definizioa 3.0.1. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala.*

(i) f-ren **nukleoa***, $Kerf$ moduan denotatuko duguna ondorengo multzoa da:*

$$\mathrm{Ker}f = f^{-1}(0_{V'}) = \{v \in V \quad | \quad f(v) = 0_{V'}\}.$$

(ii) f-ren **irudia***, Imf edo $f(V)$ moduan denotatuko duguna ondorengo multzoa da:*

$$\mathrm{Im}f = f(V) = \{f(v) \quad | \quad v \in V\}.$$

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x, y, z) = (x+y, y+z), \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ den. Orduan $\mathrm{Ker}f = \langle(-1, 1, -1)\rangle$ eta $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$. ■

Oharrak 3.0.2. *1.- Dakigunez V V-ren azpiespazioa da eta orduan $Imf = f(V)$ V'-en azpiespazioa da.*

2.- Dakigunez $\{0_{V'}\}$ V'-en azpiespazioa da eta orduan $Kerf = f^{-1}(0_{V'}$ V-ren azpiespazioa da.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x + y + z, y + 2z, -x + y + z)$ den $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Orduan $\mathrm{Ker}f = \{(0, 0, 0)\}$ eta $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^3$ da. ■

Dakigunez $f : V \to V'$ aplikazio lineala supraiektiboa da baldin eta soilik baldin $\mathrm{Im}f = V'$ bada. Hurrengo teoreman f injektiboa izateak eta $\mathrm{Ker}f$-ren arteko erlazio aztertzen du.

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Teorema 3.0.3. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala. Orduan:*

$$f \text{ injektiboa } \Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_V\}$$

Frogapena. $\Leftarrow$ Demagun f injektiboa dela. Izan bedi $v \in \text{Ker}f$ orduan $f(v) = 0_{V'} = f(0_V)$ betetzen da eta f injektiboa denez $v = 0_V$ dugu.

$\Rightarrow$ Demagun $\text{Ker}f = \{0_V\}$ betetzen dela. Izan bitez $v_1, v_2 \in V$ non $f(v_1) = f(v_2)$ betetzen den. Orduan $0_{v'} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$ berez $v_1 - v_2 \in \text{Ker}f$. ■

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x, y, z) = (x+y, y+z), \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ den. $\text{Ker}f = \langle(-1, 1, -1)\rangle \neq \{(0, 0, 0)\}$ denez f ez da injektiboa baina supraiektiboa bai.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non $f(x, y) = (x, y, x - y), \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ den. $\text{Ker}f = \{(0, 0, 0)\}$ denez f injektiboa da baina ez supraiektiboa. ■

Teorema 3.0.4. *Izan bitez V eta V' IK-espazio bektorialak, V dimentsio finitukoa izanik, orduan V-tik V'-erako edozein f aplikazio linealarentzat $Kerf$ eta Imf dimentsio finitukoak dira eta:*

$$dim V = dim \text{Ker} f + dim \text{Im} f.$$

Frogapena. Izan bedi $n = dimV$. $\text{Ker}f \leq V$ denez $\text{Ker}f$ ere dimentsio finitukoa da eta $dim\text{Ker}f \leq dimV$. Izan bedi $\{v_1, ..., v_s\}$ $\text{Ker}f$-ren oinarri

bat. Luzatzen dugu V-ren oinarri bateraino $\{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$ lortuz. Frogatzen badugu $\{f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\}$ $\text{Im}f$-ren oinarri bat dela nahikoa izango da teorema frogatzeko.

1.- Sistema sortzailea: $V = \langle v_1, ..., v_n\rangle$ denez $\text{Im}f = f(V) = \langle f(v_1), ..., f(v_s),$

$f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\rangle$ izango da, gainera $v_1, ..., v_s$ $\text{Ker}f$-ko bektoreak direnez $f(v_i) = 0_{V'}$ da $i = 1, ..., s$. Beraz $\text{Im}f\langle f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\rangle$ eta sistema sortzailea dela frogatu dugu.

2.- Sistema askea: $\{f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\}$ sistema askea dela frogatzeko ondorengo inplikazioa frogatu behar dugu,

$$k_{s+1}f(v_{s+1}) + ... + k_n f(v_n) = 0_{V'} \Rightarrow k_{s+1} = ... = k_n = 0_{IK}$$

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

$0_{V'} = k_{s+1}f(v_{s+1}) + ... + k_n f(v_n) = f(k_{s+1}v_{s+1} + ... + k_n v_n)$ denez, f aplikazio lineala izateagatik, orduan $k_{s+1}v_{s+1} + ... + k_n v_n \in \mathrm{Ker} f$ eta $\{v_1, ..., v_s\}$ nukleoaren oinarria denez orduan existituko dira $k_1, ..., k_s$ eskalarrak non $k_{s+1}v_{s+1} + ... + k_n v_n = k_1 v_1 + ... + k_s v_s$ den. Beraz $-k_1 v_1 - ... - k_s v_s + k_{s+1}v_{s+1} + ... + k_n v_n = 0_V$ eta $\{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria denez $k_{s+1} = ... = k_n = 0_{IK}$. ■