3. Gaia 3

Aplikazio Linealaren definizioa eta lehen ondorioak

[1]

Aplikazio Linealaren definizioa eta lehen ondorioak

Definizioa 3.0.1. *Izan bitez V eta V' IK-espazio bektorialak. $f : V \to V'$ aplikazio bat* **lineala** *dela esango dugu hurrengo baldintzak betetzen baditu:*

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.

(ii) $f(kv) = kf(v), \forall v \in V, \forall k \in IK$.

Adibidea. (i) Izan bedi $V = V' = \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala.

1.- Definitzen dugu $\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x \end{array}$. Orduan f aplikazio lineala da.

2.- Definitzen dugu $\begin{array}{ccc} g: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Orduan g ez da aplikazio lineala.

(ii) Izan bedi $V = V' = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. Definitzen dugu $\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, 2 \end{array}$
Orduan f aplikazio lineala da.

■

Teorema 3.0.2. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala bada orduan:*

$f(k_1 v_1 + ... + k_n v_n) = k_1 f(v_1) + ... + k_n f(v_n), \forall k_1, ..., k_n \in IK eta \forall v_1, ..., v_n \in V.$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Frogapena. n gaineko indukzioa erabiliz

1.- $n = 2$ deneko kasua. $f(k_1v_1 + k_2v_2 = f(k_1v_1) + f(k_2v_2)$, aplikazio linealaren definizioko (i) baldintza erabiliz. Orain (ii) baldintza aplikatzen badugu $f(k_1v_1) = k_1v_1$ eta $f(k_2v_2) = k_2f(v_2)$ betetzen dira.

2.- Demagun $n-1$ kasuan betetzen dela eta froga dezagun n kasuan. $f(k_1v_1+...+k_nv_n) = f(k_1v_1+...+k_{n-1}v_{n-1})+f(k_nv_n)$ da bi kasuan betetzen delako. Orain $n-1$ bektoreekin betetzen denez $f(k_1v_1 + ... + k_{n-1}v_{n-1}) = k_1f(v_1) + ... + k_{n-1}f(v_{n-1})$. ■

Ohartu aurreko teorema $\{v_1, ..., v_n\}$ oinarria deneko kasuan erabiltzen badugu $f(v_1), ..., f(v_n)$ irudiak jakinik espazioko edozein bektorearen irudia lortuko genukeela.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(1,0,0) = (1,0,-1), f(0,1,0) = (1,1,1)$ eta $f(0,0,1) = (1,2,1)$ den. Lortuko dugu $f(x,y,z)$ edozein $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ bektorearentzako. Ohartu $(x,y,z) = x(1,0,0)+ y(0,1,0) + z(0,0,1)$ dela beraz $f(x,y,z) = f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1))$ baina f aplikazio lineala dela esaten digutenez, aurreko teorema erabiliz:

$$f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) =$$

$$= x(1,0,-1) + y(1,1,1) + z(1,2,1) = (x+y+z, y+2z, -x+y+z)$$

■

Teorema 3.0.3. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala orduan hurrengo propietateak betetzen dira:*

(i) $f(0_V) = 0_{V'}$.

(ii) W V-ren azpiespazioa bada $f(W) = \{f(w) \quad | \quad w \in W$ V'-en azpiespazioa da.

(iii) T V'-en azpiespazioa bada $f^{-1}(T) = \{v \in V \quad quadf(v) \in T\}$ V-ren azpiespazioa da.

Frogapena. (i) $f(0_V) = f(0_V+0_V) = f(O_V)+f(0_V)$ eta V' talde abeldarrean elementuak sinplifikagarriak direnez $f(0_V) = 0_{V'}$ lortzen dugu.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

(ii) Argi eta garbi $f(W)$ V'-en azpimultzo ez-hutsa da. Orduan azpiespazioa dela frogatzeko hurrengo bi baldintzak frogatu behar dira: $f(w_1) + f(w_2) \in f(W), \forall f(w_1), f(w_2) \in f(W)$ eta $kf(w) \in f(W), \forall k \in IK, \forall f(w) \in f(W)$. Baina lehenengo $f(w_1 + w_2)$ da eta bigarrena $f(kw)$ gainera W azpiespazioa denez $w_1 + w_2$ eta kw W-ko bektoreak dira.

(iii) Era berean frogatzen da.

■

Oharra 3.0.4. *Izan bedi* $f : V :\rightarrow V'$ *aplikazio lineala.* $U = \langle v_1, ..., v_s \rangle \leq V$ *bada orduan* $f(U) = \langle f(v_1), ..., f(v_s) \rangle$ *da. Baina* $\{v_1, ..., v_s\}$ U*-ren oinarria bada* $\{f(v_1), ..., f(v_s)\}$ *ez du zertan* $f(U)$*-ren oinarria izan behar. Adibidez* $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ *non* $f(x, y, z) = (x+y, y+z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ *den. Orduan* $f(\mathbb{R}^3) = f(\langle e_1, e_2, e_3 \rangle) = \langle f(e_1), f(e_2), f(e_3) \rangle = \langle (1, 0), (1, 1), (0, 1) \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2$.

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia