3. Gaia 3

Aplikazio Linealak

[1]

3.1 Aplikazio Linealaren definizioa eta lehen ondorioak

Definizioa 3.1.1. *Izan bitez V eta V' IK-espazio bektorialak. $f : V \to V'$ aplikazio bat* **lineala** *dela esango dugu hurrengo baldintzak betetzen baditu:*

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2), \forall v_1, v_2 \in V$.

(ii) $f(kv) = kf(v), \forall v \in V, \forall k \in IK$.

Adibidea. (i) Izan bedi $V = V' = \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala.

1.- Definitzen dugu $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & 3x \end{array}$. Orduan f aplikazio lineala da.

2.- Definitzen dugu $\begin{array}{llll} g: & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} & \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Orduan g ez da aplikazio lineala.

(ii) Izan bedi $V = V' = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. Definitzen dugu $\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^2 & \\ & (x,y) & \mapsto & (x+y, 2 \end{array}$ Orduan f aplikazio lineala da.

■

Teorema 3.1.2. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala bada orduan:*

$f(k_1v_1 + ... + k_nv_n) = k_1f(v_1) + ... + k_nf(v_n), \forall k_1, ..., k_n \in IK eta \forall v_1, ..., v_n \in V.$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Frogapena. n gaineko indukzioa erabiliz

1.- $n = 2$ deneko kasua. $f(k_1v_1 + k_2v_2 = f(k_1v_1) + f(k_2v_2)$, aplikazio linealaren definizioko (i) baldintza erabiliz. Orain (ii) baldintza aplikatzen badugu $f(k_1v_1) = k_1v_1$ eta $f(k_2v_2) = k_2f(v_2)$ betetzen dira.

2.- Demagun $n-1$ kasuan betetzen dela eta froga dezagun n kasuan. $f(k_1v_1 + ... + k_nv_n) = f(k_1v_1 + ... + k_{n-1}v_{n-1}) + f(k_nv_n)$ da bi kasuan betetzen delako. Orain $n-1$ bektoreekin betetzen denez $f(k_1v_1 + ... + k_{n-1}v_{n-1}) = k_1f(v_1) + ... + k_{n-1}f(v_{n-1})$. ■

Ohartu aurreko teorema $\{v_1, ..., v_n\}$ oinarria deneko kasuan erabiltzen badugu $f(v_1), ..., f(v_n)$ irudiak jakinik espazioko edozein bektorearen irudia lortuko genukeela.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(1,0,0) = (1,0,-1), f(0,1,0) = (1,1,1)$ eta $f(0,0,1) = (1,2,1)$ den. Lortuko dugu $f(x,y,z)$ edozein $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ bektorearentzako. Ohartu $(x,y,z) = x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$ dela beraz $f(x,y,z) = f(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1))$ baina f aplikazio lineala dela esaten digutenez, aurreko teorema erabiliz:

$$f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) =$$

$$= x(1,0,-1) + y(1,1,1) + z(1,2,1) = (x+y+z, y+2z, -x+y+z)$$

■

Teorema 3.1.3. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala orduan hurrengo propietateak betetzen dira:*

(i) $f(0_V) = 0_{V'}$.

(ii) W V-ren azpiespazioa bada $f(W) = \{f(w) \quad | \quad w \in W$ V'-en azpiespazioa da.

(iii) T V'-en azpiespazioa bada $f^{-1}(T) = \{v \in V \quad quad f(v) \in T\}$ V-ren azpiespazioa da.

Frogapena. (i) $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(O_V) + f(0_V)$ eta V' talde abeldarrean elementuak sinplifikagarriak direnez $f(0_V) = 0_{V'}$ lortzen dugu.

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

(ii) Argi eta garbi $f(W)$ $V^{'}$-en azpimultzo ez-hutsa da. Orduan azpiespazioa dela frogatzeko hurrengo bi baldintzak frogatu behar dira: $f(w_1)+f(w_2)\in f(W), \forall f(w_1), f(w_2)\in f(W)$ eta $kf(w)\in f(W), \forall k\in IK, \forall f(w)\in f(W)$. Baina lehenengo $f(w_1+w_2)$ da eta bigarrena $f(kw)$ gainera W azpiespazioa denez w_1+w_2 eta kw W-ko bektoreak dira.

(iii) Era berean frogatzen da.

■

Oharra 3.1.4. *Izan bedi $f : V :\rightarrow V^{'}$ aplikazio lineala. $U=\langle v_1,...,v_s\rangle \leq V$ bada orduan $f(U)=\langle f(v_1),...,f(v_s)\rangle$ da. Baina $\{v_1,...,v_s\}$ U-ren oinarria bada $\{f(v_1),...,f(v_s)\}$ ez du zertan $f(U)$-ren oinarria izan behar. Adibidez $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$ non $f(x,y,z)=(x+y,y+z), \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ den. Orduan $f(\mathbb{R}^3)=f(\langle e_1,e_2,e_3\rangle)=\langle f(e_1),f(e_2),f(e_3)\rangle=\langle(1,0),(1,1),(0,1)\rangle=\langle(1,0),(0,1)\rangle=\mathbb{R}^2$.*

3.2 $L(V,V^{'})$ Espazio Bektoriala

Definizioa 3.2.1. *Izan bitez V eta $V^{'}$ IK-espazio bektorialak. Definitzen dugu:*

$$L(V,V^{'}=\{f:V:\rightarrow V^{'} \quad | \quad f \text{ aplikazio lineala } \}$$

Teorema 3.2.2. *Izan bitez V eta $V^{'}$ IK-espazio bektorialak.*

1.- $f:V:\rightarrow V^{'}$ eta $g:V:\rightarrow V^{'}$ aplikazio linealak badira orduan $f+g:V:\rightarrow V^{'}$, non $(f+g)(v)=f(v)+g(v), \forall v\in V$ den, ere aplikazio lineala da.

2.- $f:V:\rightarrow V^{'}$ aplikazio lineala bada eta $\lambda\in IK$ orduan $\lambda f:V:\rightarrow V^{'}$, non $(\lambda f)(v)=\lambda f(v), \forall v\in V$ den, ere aplikazio lineala da.

Frogapena.

1.- $f+g$ aplikazio lineala dela frogatzeko hurrengo bi baldintzak frogatu behar ditugu: (i) $(f+g)(v_1+v_2)=(f+g)(v_1)+(f+g)(v_2)$, $\forall v_1,v_2\in V$ eta (ii) $(f+g)(kv)=k(f+g)(v)$, $\forall k\in K, \forall v\in V$.

(i) $(f+g)(v_1+v_2)=f(v_1+v_2)+g(v_1+v_2)$, $f+g$-ren definizioagatik. Gainera f eta g aplikazio linealak direnez $f(v_1)+f(v_2)+g(v_1)+g(v_2)$ eta hau $f+g$-ren definizioagatik, $(f+g)(v_1)+(f+g)(v_2)$ da.

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

(ii) $(f+g)(kv) = f(kv) + g(kv)$, $f+g$-ren definizioagatik. Gainera f eta g aplikazio linealak direnez $kf(v) + kg(v)$ eta hau $f+g$-ren definizioagatik, $k(f+g)(v)$ da.

2.- λf aplikazio lineala dela frogatzeko hurrengo bi baldintzak frogatu behar ditugu: (i) $(\lambda f)(v_1+v_2) = (\lambda f)(v_1)+(\lambda f)(v_2)$, $\forall v_1, v_2 \in V$ eta (ii) $(\lambda f)(kv) = k(\lambda f)(v)$, $\forall k \in K, \forall v \in V$.

(i) $(\lambda f)(v_1+v_2) = \lambda(f(v_1+v_2))$, λf-ren definizioagatik. Gainera f aplikazio lineala denez $\lambda f(v_1) + \lambda f(v_2)$ eta hau $f+g$-ren definizioagatik, $(\lambda f)(v_1) + (\lambda f)(v_2)$ da.

(ii) $(\lambda f)(kv) = \lambda f(kv)$, λf-ren definizioagatik. Gainera f aplikazio lineala denez $\lambda k f(v)$ eta hau λf-ren definizioagatik, $k(\lambda f)(v)$ da.

$\blacksquare$

Izan bedi $L(V, V^{'})$ aurreko teoreman definitutako eragiketa eta kanpoko biderketarekin. Orduan frogatu daiteke $L(V, V^{'})$ IK espazio bektoriala dela.

Oharrak 3.2.3. *1.- Aplikazio linealei deitzeko beste modu bat espazio bektorialen arteko* **homomorfismoak** *da.*

2.- $V = V^{'}$ deneko kasuan $f : V \to V^{'}$ aplikazio lineal bati V-ren gaineko **endomorfismoa** *deitzen zaio.*

3.3 Aplikazio Lineal Baten Nukleoa eta Irudia

Definizioa 3.3.1. *Izan bedi $f : V \to V^{'}$ aplikazio lineala.*

(i) f-ren **nukleoa***, $Kerf$ moduan denotatuko duguna ondorengo multzoa da:*

$$\mathrm{Ker}f = f^{-1}(0_{V'}) = \{v \in V \quad | \quad f(v) = 0_{V'}\}.$$

(ii) f-ren **irudia***, Imf edo $f(V)$ moduan denotatuko duguna ondorengo multzoa da:*

$$\mathrm{Im}f = f(V) = \{f(v) \quad | \quad v \in V\}.$$

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x,y,z) = (x+y, y+z), \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ den. Orduan $\mathrm{Ker}f = \langle(-1,1,-1)\rangle$ eta $\mathrm{Im}f = \mathbb{R}^2$. $\blacksquare$

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

5

Oharrak 3.3.2. *1.- Dakigunez V V-ren azpiespazioa da eta orduan $Imf = f(V)$ V'-en azpiespazioa da.*

2.- Dakigunez $\{0_{V'}\}$ V'-en azpiespazioa da eta orduan $Kerf = f^{-1}(0_{V'}$ V-ren azpiespazioa da.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x + y + z, y + 2z, -x + y + z)$ den $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Orduan $\text{Ker}f = \{(0, 0, 0)\}$ eta $\text{Im}f = \mathbb{R}^3$ da. ∎

Dakigunez $f : V \to V'$ aplikazio lineala supraiektiboa da baldin eta soilik baldin $\text{Im}f = V'$ bada. Hurrengo teoreman f injektiboa izateak eta $\text{Ker}f$-ren arteko erlazio aztertzen du.

Teorema 3.3.3. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala. Orduan:*

$$f \textit{ injektiboa } \Leftrightarrow \text{Ker}f = \{0_V\}$$

Frogapena. $\Leftarrow$ Demagun f injektiboa dela. Izan bedi $v \in \text{Ker}f$ orduan $f(v) = 0_{V'} = f(0_V)$ betetzen da eta f injektiboa denez $v = 0_V$ dugu.

$\Rightarrow$ Demagun $\text{Ker}f = \{0_V\}$ betetzen dela. Izan bitez $v_1, v_2 \in V$ non $f(v_1) = f(v_2)$ betetzen den. Orduan $0_{v'} = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1 - v_2)$ berez $v_1 - v_2 \in \text{Ker}f$. ∎

Adibidea. 1.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ non $f(x, y, z) = (x+y, y+z), \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ den. $\text{Ker}f = \langle(-1, 1, -1)\rangle \neq \{(0, 0, 0)\}$ denez f ez da injektiboa baina supraiektiboa bai.

2.- Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ non $f(x, y) = (x, y, x - y), \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ den. $\text{Ker}f = \{(0, 0, 0)\}$ denez f injektiboa da baina ez supraiektiboa. ∎

Teorema 3.3.4. *Izan bitez V eta V' IK-espazio bektorialak, V dimentsio finitukoa izanik, orduan V-tik V'-erako edozein f aplikazio linealarentzat $Kerf$ eta Imf dimentsio finitukoak dira eta:*

$$dimV = dim\text{Ker}f + dim\text{Im}f.$$

Frogapena. Izan bedi $n = dimV$. $\text{Ker}f \leq V$ denez $\text{Ker}f$ ere dimentsio finitukoa da eta $dim\text{Ker}f \leq dimV$. Izan bedi $\{v_1, ..., v_s\}$ $\text{Ker}f$-ren oinarri

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[6]

bat. Luzatzen dugu V-ren oinarri bateraino $\{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$ lortuz. Frogatzen badugu $\{f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\}$ Imf-ren oinarri bat dela nahikoa izango da teorema frogatzeko.

1.- Sistema sortzailea: $V = \langle v_1, ..., v_n\rangle$ denez Im$f = f(V) = \langle f(v_1), ..., f(v_s),$

$f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\rangle$ izango da, gainera $v_1, ..., v_s$ Ker$f$-ko bektoreak direnez $f(v_i) = 0_{V'}$ da $i = 1, ..., s$. Beraz Im$f\langle f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\rangle$ eta sistema sortzailea dela frogatu dugu.

2.- Sistema askea: $\{f(v_{s+1}), ..., f(v_n)\}$ sistema askea dela frogatzeko ondorengo inplikazioa frogatu behar dugu,

$$k_{s+1}f(v_{s+1}) + ... + k_nf(v_n) = 0_{V'} \Rightarrow k_{s+1} = ... = k_n = 0_{IK}$$

$0_{V'} = k_{s+1}f(v_{s+1})+...+k_nf(v_n) = f(k_{s+1}v_{s+1}+...+k_nv_n)$ denez, f aplikazio lineala izateagatik, orduan $k_{s+1}v_{s+1} + ... + k_nv_n \in$Ker$f$ eta $\{v_1, ..., v_s\}$ nukleoaren oinarria denez orduan existituko dira $k_1, ..., k_s$ eskalarrak non $k_{s+1}v_{s+1}+ ...+k_nv_n = k_1v_1+...+k_sv_s$ den. Beraz $-k_1v_1-...-k_sv_s+k_{s+1}v_{s+1}+...+k_nv_n = 0_V$ eta $\{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria denez $k_{s+1} = ... = k_n = 0_{IK}$. ■

3.4 Espazio Bektorialen Arteko Isomorfismoak

Definizioa 3.4.1. *Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala. f* **isomorfismoa** *dela esango dugu baldin eta f bijektiboa bada. $V = V'$ deneko kasuan isomorfismo bati* **automorfismoa** *ere deitzen zaio.*

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$, $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. orduan f isomorfismoa da eta gainera automorfismoa. ■

Definizioa 3.4.2. *Izan bitez V eta V' IK-espazio bektorialak. V eta V'* **isomorfoak** *direla esango dugu baldin eta existitzen bada V-tik V'erako f isomorfismo bat eta kasu honetan $V \equiv V'$ moduan adieraziko dugu.*

Adibidea. 1.- $\mathbb{R}^4 \equiv P_3(\mathbb{R})$ baina $\mathbb{R}^3 \not\equiv \mathbb{R}^4$.

2.- $\mathbb{R}^6 \equiv M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

■

[6]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[7]

Teorema 3.4.3. *Izan bitez V eta V' dimentsio finituko IK espazio bektorialak. Orduan:*

$$V \equiv V' \Leftrightarrow dimV = dimV'$$

Frogapena. $\Rightarrow$ Demagun $V \equiv V'$ betetzen dela, orduan existitzen da $f : V \to V'$ isomorfismo bat. Beraz Ker$f = \{0_V\}$ eta Im$f = V'$ dira. Gainera $dimV = dim\text{Ker}f + dim\text{Im}f$ betetzen denez, $dimV = dimV'$ berdintza dugu.

$\Leftarrow$ Demagun $dimV = dimV'$ betetzen dela. Izan bitez $\{v_1, ..., v_n\}$ eta $\{u_1, ..., u_n\}$ V eta V'-en oinarriak hurrenez hurren. Izan bedi $f : V \to V'$ aplikazio lineala non $f(v_i) = u_i$ den $i = 1, .., n$. f bijektiboa dela frogatzen badugu teorema frogatuta izango dugu.

1.- f injektiboa: Izan bedi $v \in$ Ker$f$ bektorea. Orduan $v = k_1v_1 + ... + k_nv_n$ moduan adierazi ahal da eta $f(v) = 0_{V'}$. Beraz $k_1f(v_1) + ... + k_nf(v_n) = 0_{V'}$ betetzen da. Orduan $k_1u_1 + ... + k_nu_n = 0_{V'}$ dugu baina $\{u_1, ..., u_n\}$ V'-en oinarria denez $k_1 = ... = k_n = 0_{IK}$ da eta orduan $v = 0_V$.

2.- f supraiektiboa: $dimV = dim\text{Ker}f + dim\text{Im}f$ denez eta Ker$f = \{O_V\}$ orduan $dimV = dim\text{Im}f$ eta beraz $dimV' = dim\text{Im}f$, Im$f \leq V'$ denez, Im$f = V'$ dugu. ■

3.5 Aplikazio Lineal Bati Elkartutako Matrizea

Izan bitez V (dim$V = n$) eta V' (dim $V' = m$) IK espazio bektorialak eta $f : V \to V'$ aplikazio lineala. Izan bitez $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta V'en oinarriak hurrenez-hurren. Orduan $v = \lambda_1v_1 + ... + \lambda_nv_n$ bektorea bada $f(v) = \lambda_1f(v_1) + ... + \lambda_nf(v_n)$. Matrizialki adierazita:

$$f(v) = (f(v_1)...f(v_n)) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dakigunez $f(v_i) \in V'$ $i = 1, ..., n$ guztietarako beraz $\exists! a_{1i}, ..., a_{mi} \in IK$ non $f(v_i) = a_{1i}w_1 + ... + a_{mi}w_m$ betetzen den. Matrizialki adierazita:

$$f(v_i) = (w_1...w_m) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$$

[7]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[8]

Ondorioz:

$$f(v) = (w_1 ... w_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definizioa 3.5.1. *Aurreko egoeran* $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *f-ri elkartutako matrizea* β_V *eta* $\beta_{V'}$ *oinarriekiko deitzen da eta denotatuko dugu* $M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$.

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x, y, z) = (x - 3y, x + z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ den.

1.- Izan bitez β_1 eta β_2 $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.- Izan bitez $\beta'_1 = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ eta $\beta'_2 = \{(1,0), (1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{\beta'_1}^{\beta'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

■

Teorema 3.5.2. *Izan bitez* V *eta* V' *dimentsio finituko espazio bektorialak,* $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ *eta* $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V *eta* V'*en oinarriak izanik hurrenez-hurren. Orduan:*

1.- $f, g \in L(V, V')$ *badira:*

$$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f + g) = M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) + M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(g).$$

2.- $f \in L(V, V')$ *eta* $k \in IK$ *badira:*

$$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(kf) = kM_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$$

[8] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

9

Frogapena. 1.- Frogatuko dugu, 2.- era berean frogatzen da.

$M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f+g)$ matrizearen i zutabean $f(v_i)+g(v_i)$ bektorearen koordenatuak daude $\beta_{V'}$ oinarriarekiko. Baina koordenatu hauek $f(v_i)$-ren koordenatuei $g(v_i)$-renak batuz lortzen dira.

■

Teorema 3.5.3. *Izan bitez V eta V' dimentsio finituko espazio bektorialak, $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta V'en oinarriak izanik hurrenez-hurren. Definitzen dugu hurrengo aplikazioa:*

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & L(V,V') & \rightarrow & M_{m\times n}(IK) \\ & & f & \mapsto & M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) \end{array}$$

Orduan φ isomorfismo bat da.

Frogapena. Aurreko teoremak frogatzen digu φ aplikazio lineala dela.

φ injektiboa dela frogatzeko aplikazioaren nukleoa erabiliko dugu. $f \in$Ker φ baldin eta soilik baldin $M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) = (0)$ matrize nulua bada eta horretarako derrigorrezkoa da f aplikazio nulua izatea. Beraz, Ker$\varphi = \{0_{L(V,V')}\}$ eta honek injektiboa dela frogatzen digu.

φ supraiektiboa dela frogatuko dugu. Izan bedi $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(IK)$. Definitzen dugu $f : V \rightarrow V'$ aplikazio lineala datu hauekin: $f(v_i) = a_{1i}w_1 + ... + a_{mi}w_m$, $i = 1, ..., n$. Honekin f guztiz definiturik dago eta noski f-ri elkartutako matrizea oinarri horietan A da.

■

Teorema 3.5.4. *Izan bitez V, V' eta Z dimentsio finituko espazio bektorialak, β_V, $\beta_{V'}$ eta β_Z V, V' eta Z-ren oinarriak izanik hurrenez-hurren. $f \in L(V,V')$ eta $g \in L(V',Z)$ badira hurrengoa betetzen da:*

1.- $g \circ f$ aplikazio lineala da V-tik Z-ra.

2.-

$$M_{\beta_V}^{\beta_Z}(g\circ f) = M_{\beta_{V'}}^{\beta_Z}(g)M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f)$$

[9]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[10]

3.6 Aplikazio Lineal Bati Elkartutako Matrizeen Arteko Erlazioa

Izan bitez V (dim$V = n$) eta V' (dim $V' = m$) IK espazio bektorialak eta $f : V \to V'$ aplikazio lineala.

1.- $\beta_V = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta_{V'} = \{w_1, ..., w_m\}$ V eta V'en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan:

$$f(v) = (w_1...w_m) M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

2.- ${\beta'}_V = \{v'_1, ..., v'_n\}$ eta ${\beta'}_{V'} = \{w'_1, ..., w'_m\}$ V eta V'en oinarriak badira hurrenez-hurren orduan:

$$f(v) = (w'_1...w'_m) M_{\beta'_V}^{{\beta'}_{V'}}(f) \begin{pmatrix} {\lambda'}_1 \\ \vdots \\ {\lambda'}_n \end{pmatrix}.$$

Ohartu hurrengo berdintzak betetzen direla:

(i) $(w'_1...w'_m) M_{\beta_{V'}}^{{\beta'}_{V'}} = (w_1...w_m)$.

(ii) $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M_{{\beta'}_V}^{\beta_V} \begin{pmatrix} {\lambda'}_1 \\ \vdots \\ {\lambda'}_n \end{pmatrix}$.

Beraz 1.- formulan ordezkatuz:

$$f(v) = (w'_1...w'_m) M_{\beta_{V'}}^{{\beta'}_{V'}} M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) M_{{\beta'}_V}^{\beta_V} \begin{pmatrix} {\lambda'}_1 \\ \vdots \\ {\lambda'}_n \end{pmatrix}.$$

Ondorioz elkartutako matrizea bakarra denez hurrengo erlazioa frogatu dugu:

$$M_{\beta_{V'}}^{{\beta'}_{V'}} M_{\beta_V}^{\beta_{V'}}(f) M_{{\beta'}_V}^{\beta_V} = M_{{\beta'}_V}^{{\beta'}_{V'}}(f).$$

[10]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[11]

Adibidea. Izan bedi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala non $f(x,y,z) = (x-3y, x+z), \forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ den. Izan bitez β_1 eta β_2 $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoak hurrenez-hurren. Aurreko adibidiean ikusi bezala

$$M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izan bitez $\beta'_1 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ eta $\beta'_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ $\mathbb{R}^3$ eta $\mathbb{R}^2$-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:

$$M_{\beta'_1}^{\beta'_2}(f) = M_{\beta_2}^{\beta'_2} M_{\beta_1}^{\beta_2}(f) M_{\beta'_1}^{\beta_1}$$

Beraz:

$$M_{\beta'_1}^{\beta'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

[11] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia