2. Gaia 3

Oinarria eta Dimentsioa

[1]

3.0.1 Konbinazio Lineala

Definizioa 3.0.1. *Izan bitez* $v_1, ..., v_n \in V$ *finkoak. Beste bektore bat* $v \in V$ $v_1, ..., v_n$ *bektoreen* **konbinazio lineala** *dela esaten baldin eta existitzen badira* $k_1, ..., k_n \in IK$ *non* $v = k_1v_1 + ... + k_nv_n$ *betetzen den, hau da* $v \in \langle v_1, ..., v_n \rangle$ *betetzen bada.* $k_1, ..., k_n$ *eskalarrak konbinazio linealaren* **koefizienteak** *deitzen dira.*

Adibideak 3.0.2.

(i) Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala.* $v = (1, 0, -1)$ *bektorea* $(1, 0, 0), (1, 1, 0)$ *eta* $(1, 1, 1)$ *bektoreen konbinazio lineala da.*

(ii) Izan bedi $P_3(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala.* $v = 1 - 2x + x^3$ *bektorea* $1, 1 + x, 1 + x + x^2$ *eta* $1 + x + x^2 + x^3$ *bektoreen konbinazio lineala da.*

3.0.2 Sistema Askea

Definizioa 3.0.3. *Izan bitez* $v_1, ..., v_n \in V$ *bektore finkoak.* $v_1, .., v_n$ **linealki independenteak** *direla, edo* $\{v_1, ..., v_n\}$ **sistema askea**, *dela esango dugu*

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

baldin eta hurrengo inplikazioa betetzen badu:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = 0_{IK} \Rightarrow k_1 = k_2 = ... = k_n = 0_{IK}.$$

Beste kasuan bektoreak **linealki dependenteak***, edo* **sistema lotua***, dela esango dugu.*

Adibideak 3.0.4.

(i) Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *sistema askea da.*

(ii) Izan bedi $M_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\}$ *sistema lotua da.*

Definizioa 3.0.5. *Izan bedi* $\emptyset \neq T \subseteq V$ *azpimultzoa.* T **askea** *dela esango dugu baldin eta bere azpimultzo finitu bakoitza sistema askea bada, hau da:*

$$\{v_1, ..., v_n\} \text{ sistema askea }, \forall \{v_1, ..., v_n\} \subseteq T.$$

Beste kasuan T **lotua** *dela esango dugu.*

Adibideak 3.0.6. *Izan bedi* $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *multzo infinitua lotua da.*

Lema 3.0.7. *Izan bedi* $T \subseteq V$ *askea eta demagun* v *ezin dela* T*-ko elementuen konbinazio lineal moduan adierazi. Orduan* $T \cup \{v\}$ *ere askea da.*

Frogapena. Izan bedi $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq T \cup \{v\}$. $\{v_1, ..., v_n\}$ sistema askea dela frogatu behar dugu eta horretarako bi kasu bereizten ditugu.

1.- Kasua: $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$. Orduan $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq T$ eta T askea denez $\{v_1, ..., v_n\}$ sistema askea izango da.

2.- Kasua: $v \in \{v_1, ..., v_n\}$. Demagun $v_n = v$ dela, orduan $\{v_1, ..., v_{n-1}, v\}$ sistema askea dela frogatu behar dugu. Horretarako $k_1v_1 + ... + k_{n-1}v_{n-1} + kv = 0_V$ berdintzan $k = 0_{IK}$ izan behar da, bestela, existituko litzateke k^{-1} eta orduan v askatuz, v T-ko elementuen konbinazio lineala dela frogatuko genuke eta hau ezinezkoa da hipotesiagatik. Beraz $k_1v_1 + ... + k_{n-1}v_{n-1} = 0_V$ baina orain $v_1, ..., v_{n-1} \in T$ direnez eta T askea denez konbinazio linealeko koefiziente guztiak nuluak izan behar dira. ∎

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Adibideak 3.0.8. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala.* $(1,0,0)$ *bektore ez-nulua denez* $T = \{(1,0,0)\}$ *sistema askea da. Orduan, aurreko lemaren arabera,* $v \notin \langle(1,0,0)\rangle$ *aukeratuz, adibidez* $v = (1,0,-1)$*,* $T\cup\{(1,0,-1) = \{(1,0,0),(1,0,-1)\}$ *ere askea da. Prozesua jarraituz,* $w \notin \langle(1,0,0),(1,0,-1)\rangle$ *aukeratuz hurrengo multzo hau ere* $\{(1,0,0),(1,0,-1)\}\cup\{(2,1,5)\}$ *askea da. Baina orain aurrera ezin dugu jarraitu.*

3.0.3 Sistema Sortzailea

Definizioa 3.0.9. *Izan bedi* $S \subseteq V$ *azpimultzoa.* S V*-ren* **sistema sortzailea** *dela esango dugu baldin eta* $V = \langle S\rangle$ *betetzen bada, hau da,* V*-ko edozein bektorea* S*-ko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da.*

Adibideak 3.0.10. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala. Orduan* $\{(1,0,0),(1,1,0),$

$(1,1,1)\}$ *bektore sistema* $\mathbb{R}^3$*-ren sistema sortzaile bat da.*

Lema 3.0.11. *Izan bedi* S V *espazioaren sistema sortzaile. Demagun existitzen dela* $w \in S$ *bektorea* $S - \{w\}$ *multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adieraz daiteekena. Orduan* $S - \{w\}$ *ere* V*-ren sistema sortzaile bat da.*

Frogapena. Izan bedi $v \in V$ bektorea. Frogatu behar dugu $S - \{w\}$ multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal dela. Hipotesiz badakigu v S multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adieraz daitekeela, hau da, existitzen dira $k_1, ..., k_{n-1}, k \in K$ eta $v_1, ..., v_{n-1}, w \in S$ non hurrengoa betetzen den:

$$v = k_1v_1 + ...k_{n-1}v_{n-1} + kw$$

Orain $v_1, ..., v_{n-1} \in S-\{w\}$, w-ren desberdinak direlako eta gainera, hipotesiagatik w $S - \{w\}$ nmultzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da ondorioz v $S - \{w\}$ multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da. ∎

Definizioa 3.0.12. V **finituki sortua** *dela esaten da existitzen bada* S V*-ren sistema sortzaile finitua (*$|S|$ *finitua).*

Adibideak 3.0.13. $P_3(\mathbb{R})$ *finituki sortua da* $\{1, x, x^2, x^3\}$ $P_3(\mathbb{R})$*-ren sistema sortzaile finitua delako.*

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

3.0.4 Oinarria

Definizioa 3.0.14. *β V-ren* **oinarria** *dela esaten da baldin eta β V-ren sistema sortzailea eta sistema askea bada.*

Adibideak 3.0.15. *1.- Izan bedi $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala, definitzen ditugu $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, 1 i. tokian dugu, $i = 1, ..., n$ orduan $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat da, oinarri hau* **kanonikoa** *deitzen da eta β_k moduan denotatuko dugu.*

2.- Izan bedi $P_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala orduan $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ espazioaren oinarri bat da.

3.- Izan bedi $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala orduan $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\}$ *espazioaren oinarri bat da.*

4.- Izan bedi $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + z = 0\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioa orduan $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ W-ren oinarri bat da.

Teorema 3.0.16. *Izan bedi V finituko sortutako espazio bektoriala. Orduan V-k oinarri finitu bat du.*

Frogapena. Izan bedi S V-ren sistema sortzaile finitu bat. Bi aukera daude:

1.- S sistema askea izatea. Orduan S V-ren oinarria da eta frogapena bukatu da.

2.- S sistema lotua izatea. Orduan existitzen dira $k_1, ..., k_n \in K$ ez denak nuluak eta $v_1, ..., v_n \in V$ bektoreak non $k_1 v_1 + ... + k_n v_n = 0_V$ den. Baina orduan bektoreetako bat besteen konbinazio lineal moduan adieraz daiteke, demagun v_n dela bektore hori. Orduan, lema erabiliz, $S - \{v_n\}$ ere sistema sortzailea da.

Prozedura jarraituz $S - \{v_n\}$ multzoarekin azkenean oinarri bat lortuko dugu. ∎

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

Teorema 3.0.17. *Izan bitez V n dimentsioko IK-espazio bektoriala eta $S \subseteq V$ V-ren sistema sortzailea. Orduan betetzen dira:*

(i) Existitzen da β V-ren oinarria non $\beta \subseteq S$ betetzen den.

(ii) $|S| \geq n$.

(iii) $|S| = n$ bada orduan S V-ren oinarria da.

Frogapena. Lehenengo atala aurreko teoreman frogatu dugu

(ii) $\beta \subseteq S$ denez kardinalak hartuz $|\beta| \subseteq |S|$.

(iii) $|S| = n$ bada orduan (i) ataleko β oinarria eta S berbera da.

■

Teorema 3.0.18. *Izan bitez V n dimentsioko IK-espazio bektoriala eta $T \subseteq V$ sistema askea. Orduan betetzen dira:*

(i) T V-ren oinarri bateraino luza daiteke, hau da, existitzen da β V-ren oinarria non $T \subseteq \beta$ betetzen den.

(ii) $|T| \leq n$.

(iii) $|T| = n$ bada orduan T V-ren oinarria da.

Frogapena. (i) Izan bitez T sistema askea eta $\beta' = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria. Orduan bi posibilitate daude:

1.- T V-ren sistema sortzailea da eta orduan oinarria, beraz frogapena bukatuta dago kasu honetan.

2.- T ez da V-ren sistema sortzailea. Orduan $\langle T \rangle \neq V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ betetzen da. Beraz, existitzen da $i \in \{1, ..., n\}$ non $v_i \notin \langle T \rangle$, demagun $i = 1$ dela. Lema bat erabiliz, badakigu $T \cup \{v_1\}$ ere sistema askea dela. Aurreko prozedura jarraituz sistema aske berri honekin azkenean β oinarri bat lortuko dugu non $T \subseteq \beta$ betetzen den.

(ii) $T \subseteq \beta$ denez kardinalak hartuz $|T| \subseteq |\beta|$.

(iii) $|T| = n$ bada orduan (i) ataleko β oinarria eta T berbera da. ■

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

6[6]

Teorema 3.0.19. *Izan bitez $U_1, ..., U_n$ V-ren dimentsio finituko azpiespazio bektorialak eta $\beta_{U_1}, ..., \beta_{U_n}$ U_1,...,U_n-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:*

$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \Leftrightarrow \beta_{U_1} \cup \cdots \cup \beta_{U_n}, U_1 + \cdots + U_n$ *azpiespazioaren oinarria bada*

Frogapena. n gaineko indukzioa erabiliz, $n = 2$ kasuan bakarrik frogatuko dugu.

$\Rightarrow$. Demagun $U_1 \oplus U_2$ betetzen dela. Dakigunez $\beta_{U_1} \cup \beta_{U_2}$ $U_1 + U_2$ azpiespazioaren sistema sortzailea da beti. Orain askea dela frogatuko dugu, $\beta_{U_1} = \{v_1, ..., v_s\}$ eta $\beta_{U_2} = \{w_1, ..., w_t\}$ badira,:

$$k_1 v_1 + ... + k_s v_s + k_1^{'} w_1 + ... + k_t^{'} w_t = 0_V \Rightarrow k_1 = ... = k_t^{'} = 0_{IK}$$

Izan bitez $u_1 = k_1 v_1 + ... + k_s v_s$ eta $u_2 = k_1^{'} w_1 + ... + k_t^{'} w_t$. Orduan $u_1 = -u_2 \in U_1 \cap U_2$ betetzen da. Baina batura zuzena denez $u_1 = -u_2 = 0_V$ eta ondorioz, $\{v_1, ..., v_s\}$ eta $\{w_1, ..., w_t\}$ sistema askeak direnez inplikazioa frogatuta dago.

$\Leftarrow$. Demagun $\beta_{U_1} \cup \beta_{U_2}$ $U_1 + U_2$-ren oinarria dela. Froga dezagun $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ betetzen dela. Horretarako, izan bedi $v \in U_1 \cap U_2$ beraz, $\beta_{U_1} = \{v_1, ..., v_s\}$ eta $\beta_{U_2} = \{w_1, ..., w_t\}$ badira, $v = k_1 v_1 + ... + k_s v_s = k_1^{'} w_1 + ... + k_t^{'} w_t$. Orduan $k_1 v_1 + ... + k_s v_s - k_1^{'} w_1 - ... - k_t^{'} w_t = 0_V$. Baina oinarrien bildura sistema askea denez, derrigorrez $k_1 = ... = k_s = 0_{IK}$ beteko da eta orduan $v = k_1 v_1 + ... + k_s v_s = 0_V$.

■

Teorema 3.0.20. *Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan oinarri guztiak kardinal berbera dute.*

Definizioa 3.0.21. *Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan oinarri baten kardinala, aurreko teoremaren arabera berdin du ze oinarri aukeratu, V-ren* **dimentsioa** *deitzen da eta denotatuko dugu $dim_{IK} V$ edo $dim V$ moduan.*

Adibideak 3.0.22. *1.- Izan bedi IK^n IK espazio bektoriala orduan $dim IK^n = n$ da.*

2.- Izan bedi $P_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala orduan $dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$ da.

3.- Izan bedi $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala orduan $dim M_{n \times m}(\mathbb{R}) = nm$ da.

[6] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[7]

3.0.5 Azpiespazioen dimentsioa

Teorema 3.0.23. *Izan bitez V dimentsio finituko IK espazio bektoriala eta $W \leq V$. Orduan W ere dimentsio finitukoa da eta $dimW \leq dimV$. Gainera:*

$$dimW = dimV \Leftrightarrow W = V \ bada$$

Frogapena. Izan bedi $\beta_W = \{w_1, ..., w_s\}$ W-ren oinarri bat. Orduan, $W \leq V$ denez, V-ko bektoreak dira eta gainera sistema askea V-n. Beraz, teorema erabiliz, existitzen da β V-ren oinarria non $\beta_W \subseteq \beta$ betetzen den. Orain, dimentsioaren definizioagatik, $dimW \leq dimV$ dela frogatzen du. Gainera $dimW = dimV$ da baldin eta soilik baldin $\beta_W = \beta$, hau da, $W = V$ betetzen bada. ∎

Definizioa 3.0.24. *Izan bitez V IK espazio bektoriala eta $W \leq V$. Beste azpiespazio bat U W-ren* **betegarri** *bate dela esango dugu baldin eta $V = W \oplus U$ betetzen bada. Hau da, W eta U-ren arteko batura zuzena da eta gainera $W + U = V$ da.*

Teorema 3.0.25. *Izan bitez V dimentsio finituko IK espazio bektoriala eta $W \leq V$. Orduan W azpiespazio bektorialak betegarri bat du.*

Frogapena. V dimentsio finitukoa denez, aurreko teorema erabiliz, W ere dimentsio finitukoa da eta gainera $dimW \leq dimV$ betetzen da. Izan bedi $\beta_W = \{w_1, ..., w_s\}$ W-ren oinarri bat, sistema askea denez V-n, V-ren oinarri bateraino luza daiteke, $\beta = \{w_1, ..., w_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$ V-ren oinarria lortuz. Definitzen dugu $U = \langle v_{s+1}, ..., v_n rangle$ azpiespazioa eta W-ren betegarri bat dela frogatuko dugu. Izan bitez $\beta_W = \{w_1, ..., w_s\}$ eta $\beta_U = \{v_{s+1}, ..., v_n\}$ W eta U-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan $\beta_W \cup \beta_U$ sistema askea denez W eta U-ren arteko batura zuzena da eta gainera bildura V-ren oinarria denez teorema frogatuta dago. ∎

Adibideak 3.0.26. *Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ azpespazioaren betegarri bat lortuko dugu aurreko teoremako frogapena jarraituz.*

Lehenengo W-ren oinarri bat lortu behar dugu. Argi eta garbi

[7]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[8]

$W = \langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle$ da eta gainera sistema askea denez $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ W-ren oinarri bat da.

Ondoren $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bateraino luzatzen dugu. Adibidez $e_1 = (1,0,0)$ bektorea gaineratuz, $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$ lortuko genuke. Beraz $U = \langle (1,0,0) \rangle$ W-ren betegarri bat da.

Ohartu $U' = \langle (0,1,0) \rangle$ ere betegarria dela, beraz betegarria ez da bakarra.

Teorema 3.0.27. *Izan bitez U eta W V-ren dimentsio finituko azpiespazio bektorialak. Orduan $U+W$ ere dimentsio finitukoa da eta gainera:*

$$dim(W+U) = dimW + dimU - dim(W \cap U).$$

Frogapena. Hurrengo definizioak ditugu $dimW = r, dimU = s$ eta $dim(U \cap W) = t$.

Izan bedi $\beta_{W \cap U} = \{w_1, ..., w_t\}$ $W \cap U$ azpiespazioaren oinarri bat.

1.- $W \cap U \leq W$ denez, W-ren oinarri bateraino luza daiteke:

$$\{w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_r\}$$

2.- $W \cap U \leq U$ denez, U-ren oinarri bateraino luza daiteke:

$$\{w_1, ..., w_t, u_{t+1}, ..., u_s\}$$

Teorema frogatuta dago baldin eta frogatzen badugu:

$$\{w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_r, u_{t+1}, ..., u_s\}$$

$W+U$-ren oinarri bat dela. Horretarako, definizioaren arabera, $W+U$-ren sistema sotzailea eta sistema askea dela frogatuko behar dugu.

(i) $W+U$-ren sistema sortzailea delaren frogapena. Baturako edozein betore $v = w + u$ moduan adierazi ahal da. Gainera $w \in W$ denez w $w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_r$ bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da, eta, era berean $u \in U$ denez u $w_1, ..., w_t, u_{t+1}, ..., u_s$ bektoreen konbinazio lineal moduan. Beraz, v $w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_r, u_{t+1}, ..., u_s$ bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da.

(ii) Sistema askea delaren frogapena:

$$k_1 w_1 + ... + k_t w_t + k_{t+1} w_{t+1} + ... + k_r w_r + \lambda_{t+1} u_{t+1} + ... + \lambda_s u_s = 0_V \Rightarrow$$

[8] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

9

$$\Rightarrow k_1 = ... = \lambda_s = 0_{IK}$$

Definitzen dugu $w = k_1w_1 + ... + k_tw_t + k_{t+1}w_{t+1} + ... + k_rw_r$ eta $u = \lambda_{t+1}u_{t+1} + ... + \lambda_su_s$. Orduan, aurreko berdintzatik $w = -u \in W \cap U$ eta $\{w_1, ..., w_t\}$ $W \cap U$ azpiespazioaren oinarri bat denez $w = k_1^{'}w_1 + ... + k_t^{'}w_t$ moduan adierazi ahal da, baina orduan $k_1w_1 + ... + k_tw_t + k_{t+1}w_{t+1} + ... + k_rw_r = k_1^{'}w_1 + ... + k_t^{'}w_t$ izango dugu eta ondorioz $(k_1 - k_1^{'})w_1 + ... + (k_t - k_t^{'})w_t + k_{t+1}w_{t+1} + ... + k_rw_r = 0_V$ da eta $\{w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_r\}$ W-ren oinarria denez derrigorrez $k_{t+1} = ... = k_r = 0_{IK}$. Hasierako adierazpenean ordezkatuz $k_1w_1 + ... + k_tw_t + +\lambda_{t+1}u_{t+1} + ... + \lambda_su_s = 0_V$ dugu eta $\{w_1, ..., w_t, u_{t+1}, ..., u_s\}$ U-ren oinarria denez konbinazioko koefiziente guztiak zero izan behar dira. ■

---

[9]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia