2. Gaia 2

Azpiespazioak

[1]

Definizioa 2.0.1. *Izan bedi V IK-espazio bektoriala. $W \subseteq V$ azpimultzo bat V-ren* **azpiespazio bektoriala**, *edo azpiespazioa, dela esaten da, eta $W \leq V$ denotatuko dugu, hurrengo baldintzak betetzen baditu:*

(i) V-ko eragiketa W-n ere eragiketa da, hau da:

$$w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W.$$

(ii) V-ko kanpoko biderketa W-n ere kanpoko biderketa da, hau da:

$$kw \in W, \forall k \in IK, \forall w \in W.$$

(iii) W eragiketa eta kanpoko biderketa horiekin IK-espazio bektoriala da.

Adibideak 2.0.2. *V IK-espazio bektoriala bada $\{O_V\}$ eta V azpiespazioak dira beti, azpiespazio hauek tribialak deitzen dira.*

Teorema 2.0.3. *Izan bitez V IK-espazio bektoriala eta $\emptyset \neq W \subseteq V$. Orduan W V-ren azpiespazioa da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen baditu:*

1.- $w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W.$

2.- $kw \in W, \forall k \in IK, \forall w \in W.$

Frogapena. Inplikazioetako bat berehalakoa da beraz beste frogatzea nahikoa dugu. Demagun W azpimultzo ez-hutsak bi propietate hauek betetzen dituela

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

1.- $w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W$.

2.- $kw \in W, \forall k \in IK, \forall w \in W$.

W azpiespazio dela frogatzeko W eragiketa eta kanpoko biderketa horiekin IK-espazio bektoriala dela frogatu behar dugu. Argi eta garbi, + eragiketak propietate elkarkorra eta trukakorra betetzen ditu (V-n betetzen direlako eta $W \subseteq V$ delako). Gainera espazio bektorialaren definizioko $(i), (ii), (iii)$ eta (iv) ere betetzen ditu arrazoi berdinagatik.

Bestalde, $\exists w \in W$ eta ondorioz, 2.- baldintza eta aurreko ataleko ondorioak erabiliz, $0_V = O_{IK}w \in W$. Orduan elementu neutroa aurkitu dugu. Azkenengoz, $w \in W$ bada $-w = (-1_{IK})w \in W$ bere alderantzizkoa ere W-n dago.

∎

Adibideak 2.0.4.

(i) Izan bedi $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ *azpiespazioa da baina* $W' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$ *ez.*

(ii) Izan bedi $M_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $W = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *azpiespazioa da.*

(iii) Izan bitez V IK*-espazio bektoriala eta* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *bektore finkoak orduan* $\{k_1v_1 + ... + k_nv_n \mid k_i \in IK, i = 1, .., n\}$ V*-ren azpiespazioa da. Azpiespazio hau* $\langle v_1, ..., v_n\rangle$ *moduan denotatuko dugu eta* $v_1, ..., v_n$ *bektoreek sortutako azpiespazioa deitzen da. Orokorrean,* $S \subseteq V$ *bada* S*-ko sortutako azpiespazioa honela definitzen da:*

$$\langle S\rangle = \{k_1v_1 + ... + k_nv_n \mid k_i \in IK, v_i \in S, i = 1, ..., n\}$$

Froga daiteke $\langle S\rangle$ *dela* S *barruan duen azpiespaziorik txikiena.*

Definizioa 2.0.5. *Izan bitez* W_1 *eta* W_2 V*-ren azpiespazioak.* W_1 *eta* W_2*-ren* **batura**, $W_1 + W_2$ *denotatuko duguna, honela definitzen da:*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_i \in W_i, i = 1, 2\}$$

Batura **zuzena** *dela esaten da baldin eta* $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ *betetzen bada, eta kasu honetan* $W_1 \oplus W_2$ *moduan denotatuko dugu.*

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Adibideak 2.0.6. *Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala. Orduan* $\langle(1,0,0)\rangle + \langle(1,1,0)\rangle = \{(x,y,0) \quad | \quad x,y \in \mathbb{R}\}$ *eta gainera batura zuzena da.*

Teorema 2.0.7. *Izan bitez W_1 eta W_2 V-ren azpiespazioak. Orduan*

(i) $W_1 \cap W_2$ eta $W_1 + W_2$ V-ren azpiespazioak dira.

(ii) W_1 eta W_2-ren arteko batura zuzena da baldin eta soilik baldin:

$$\forall w \in W_1 + W_2, \exists!, w_i \in W_i, i = 1,2 \text{ non } w = w_1 + w_2 \text{ betetzen den.}$$

Frogapena.

(i) $W_1 + W_2$ azpiespazioa dela frogatuko dugu, beste era berean egiten baita. $\emptyset \neq W_1 + W_2 \subseteq V$ denez, karakterizarioa erabiliz, hurrengo bi propietateak frogatu behar ditugu:

$$(w_1 + w_2) + (w_1^{'} + w_2^{'}) \in W_1 + W_2, \forall w_1 + w_2, w_1^{'} + w_2^{'} \in W_1 + W_2.$$

$$k(w_1 + w_2) \in W_1 + W_2, \forall w_1 + w_2 \in W_1 + W_2, \forall k \in IK.$$

Baina $(w_1 + w_2) + (w_1^{'} + w_2^{'}) = (w_1 + w_1^{'}) + (w_2 + w_2^{'})$ denez eta W_1 eta W_2 azpiespazioak direnez, hau da $w_1 + w_1^{'} \in W_1, w_2 + w_2^{'} \in W_2$, berehalakoa da lehenengo baldintza. Bigarrena antzera frogatzen da.

(ii) $\Rightarrow$ frogatuko dugu lehenengo. Demagun existitzen direla $w_i^{'} \in W_i$, $i = 1,2$, non $w_1 + w_2 = w = w_1^{'} + w_2^{'}$ betetzen duten. Orduan $w_1 - w_1^{'} = w_2^{'} - w_2$ izango dugu, berdintzaren lehenengo partea W_1-en dago, W_1 azpiespazioa delako eta bigarrena berriz W_2-n. Ondorioz bektore hori $W_1 \cap W_2$ dago eta batura zuzena denez bektore nulua izan behar du.

$\Leftarrow$ frogatuko dugu. Izan bedi $v \in W_1 \cap W_2$ orduan $v = v + 0_V$ adierazpenak v W_1 eta W_2-ko bektoreen batura bezala adierazten du. Bestalde, $v = 0_V + v$ adierazpenak ere gauza bera adierazten du. Hipotesiz, adierazteko modua bakarra denez $v = 0_V$ izan behar du. ■

Kasu orokorra

Definizioa 2.0.8. *Izan bitez $W_1, W_2, ..., W_n$ V-ren azpiespazioak. $W_1, W_2, ..., W_n$-ren* **batura***, $W_1 + W_2 + ... + W_n$ denotatuko duguna, honela definitzen da:*

$$W_1 + W_2 + ... + W_n = \{w_1 + w_2 + ... + w_n \quad | \quad w_i \in W_i, i = 1,2,...,n\}$$

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

Batura **zuzena** *dela esaten da baldin eta* $W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_n) = \{0_V\}$ *bada* $i = 1, ..., n$, *eta kasu honetan* $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ *moduan denotatuko dugu.*

Adibideak 2.0.9. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala. Orduan* $W_1 = \langle(1,0,0)\rangle$, $W_2 = \langle(1,1,0)\rangle$ *eta* $W_3 = \langle(1,1,1)\rangle$ *azpiespazioen batura zuzena da eta batura* $\mathbb{R}^3$ *da.*

Teorema 2.0.10. *Izan bitez* $W_1, W_2, ..., W_n$ V*-ren azpiespazioak. Orduan*

(i) $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ *eta* $W_1 + W_2 + ... + W_n$ V*-ren azpiespazioak dira.*

(ii) $W_1, W_2, ..., W_n$*-ren arteko batura zuzena da baldin eta soilik baldin* $\forall w \in W_1+W_2+...+W_n, \exists! w_i \in W_i i = 1, 2, ..., n$ *non* $w = w_1+w_2+...+w_n$ *betetzen den.*

Frogapena. n gaineko indukzioa erabiliz. ■

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia