2. Gaia 1

Espazio Bektorialaren definizioa. Ondorioak

[1]

Definizioa 1.0.1. *Izan bitez* $(IK, +, \cdot)$ *gorputza eta* V *multzoa.* V IK-**espazio bektoriala** *dela esango dugu baldin eta hurrengo baldintzak betetzen badira:*

1.- V*-n eragiketa bat definiturik dago,* $+$ *denotatuko duguna, eta* $(V, +)$ *talde abeldarra da.*

2.- Existitzen da aplikazio bat:

$$\begin{array}{ccc} IK \times V & \rightarrow & V \\ (k, v) & \rightarrow & kv \end{array}$$

kanpoko biderketa *deitzen dena, hurrengo propietateak betetzen dituelarik:*

(i) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v, \forall k_1, k_2 \in IK, \forall v \in V.$

(ii) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2, \forall v_1, v_2 \in V, \forall k \in IK.$

(iii) $(k_1k_2)v = k_1(k_2v), \forall k_1, k_2 \in IK, \forall v \in V.$

(iv) $1_{IK}v = v, \forall v \in V.$

V*-ko elementuak* **bektoreak** *deitzen dira eta* IK*-koak berriz* **eskalarrak**.

Oharra 1.0.2. *Espazio bektorialaren definizioan:*

1.- $+$ *ikurra bi eragiketa desberdinak adierazteko erabiltzen ari garela.*

(a) IK *gorputzeko lehenengo eragiketa adierazten du eta orduan elementu neutroa adierazteko* 0_{IK} *notazioa erabiliko dugu.*

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

(b) V talde abeldarreko eragiketa adierazten du eta orduan elementu neutroa adierazteko 0_V notazioa erabiliko dugu.

2.- $\cdot$ ikurra bi gauza desberdinak adierazten ditu.

(a) IK gorputzeko bigarren eragiketa adierazten du eta orduan elementu neutroa adierazteko 1_{IK} notazioa erabiliko dugu.

(b) Kanpoko biderketa adierazten du.

Adibideak 1.0.3.

(i) $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala da ondorengo batuketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kanpoko biderketa:

$$k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n), \forall k \in \mathbb{R}, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kasu orokorra, IK edozein gorputza bada IK^n IK-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in IK^n.$$

Kanpoko biderketa:

$$k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n), \forall k \in IK, \forall (x_1, ..., x_n) \in IK^n.$$

(ii) $M_{n\times m}(IK) = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad | \quad a_{ij} \in IK, \forall i \in \{1, ..., n\}$

$, \forall j \in \{1, .., m\}\}$ *IK-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:*

Eragiketa:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{n\times m}(IK).$$

[2]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

Kanpoko biderketa:

$$k(a_{ij}) = (ka_{ij}), \forall k \in IK, \forall (a_{ij}) \in M_{n\times m}(IK).$$

(iii) $P_n(IK) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \quad | \quad a_i \in IK, i = 0, ..., n\}$ *IK-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:*

Eragiketa:

$$(a_0+a_1x+...+a_nx^n)+(b_0+b_1x+...+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_n+b_n)x^n$$

$$, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in P_n(IK)$$

Kanpoko biderketa:

$$k(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = ka_0 + ka_1x + ... + ka_nx^n,$$

$$\forall k \in IK, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in P_n(IK).$$

Teorema 1.0.4. *Izan bedi V IK-espazio bektoriala. Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:*

(i) $k \cdot 0_V = 0_V, \forall k \in IK.$

(ii) $0_{IK} \cdot v = 0_V, \forall v \in V.$

(iii) $k \cdot v = 0_V$ *da baldin eta soilik baldin* $k = 0_{IK}$ *edo* $v = 0_V$ *bada.*

(iv) $-v = (-1_{IK})v, \forall v \in V.$

Frogapena.

(i) $k \cdot 0_V =$ elementu neutroa denez $= k(0_V + 0_V) =$ espazio bektorarialaren definizioaren propietateak erabiliz $= k0_V + k0_V$ eta V taldean elementuan sinplifikagarriak direnez $0_V = k0_V$.

(ii) Era berean frogatzen da.

(iii) Aurreko bi atalak erabiliz, $k = 0_{IK}$ edo $v = 0_V$ bada orduan $k \cdot v = 0_V$ betetzen da. Beste inplikazioa frogatzeko, demagun $k \neq 0_{IK}$ dela. Orduan

[3] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

k gorputzeko elementu alderanzgarria denez biderketarekiko existituko da k^{-1} bere alderantzizko. Beraz $k^{-1}k \cdot v = k^{-1}0_V$ eta espazio bektorialaren definizioko propietateak erabiliz $v = 0_V$ ondorioztatzen dugu.

(iv) Ondorio hau frogatzeko nahiko da $(-1_{IK})v$ v-ren alderantzizkoa dela frogatzen badugu. Horretarako $(-1_{IK})v+v =$ espazio bektorialaren definizioko propietateetako bat erabiliz $= (-1_{IK})v+(1_{IK})v =$ berriz ere definizioko propietate bat erabiliz $= (-1_{IK} + 1_{IK})v = 0_{IK}v = 0_V$.

∎

[4] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia