1. Gaia 2

Espazio Bektorialak

2.1 Espazio Bektorialaren definizioa. Ondorioak

Definizioa 2.1.1. *Izan bitez* $(IK, +, \cdot)$ *gorputza eta* V *multzoa.* V IK-**espazio bektoriala** *dela esango dugu baldin eta hurrengo baldintzak betetzen badira:*

1.- V*-n eragiketa bat definiturik dago,* $+$ *denotatuko duguna, eta* $(V, +)$ *talde abeldarra da.*

2.- Existitzen da aplikazio bat:

$$\begin{array}{ccc} IK \times V & \rightarrow & V \\ (k, v) & \rightarrow & kv \end{array}$$

kanpoko biderketa *deitzen dena, hurrengo propietateak betetzen dituelarik:*

(i) $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v, \forall k_1, k_2 \in IK, \forall v \in V.$

(ii) $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2, \forall v_1, v_2 \in V, \forall k \in IK.$

(iii) $(k_1k_2)v = k_1(k_2v), \forall k_1, k_2 \in IK, \forall v \in V.$

(iv) $1_{IK}v = v, \forall v \in V.$

V*-ko elementuak* **bektoreak** *deitzen dira eta* IK*-koak berriz* **eskalarrak**.

Oharra 2.1.2. *Espazio bektorialaren definizioan:*

1.- $+$ *ikurra bi eragiketa desberdinak adierazteko erabiltzen ari garela.*

(a) IK *gorputzeko lehenengo eragiketa adierazten du eta orduan elementu neutroa adierazteko* 0_{IK} *notazioa erabiliko dugu.*

[1]

(b) V talde abeldarreko eragiketa adierazten du eta orduan elementu neutroa adierazteko 0_V notazioa erabiliko dugu.

2.- $\cdot$ ikurra bi gauza desberdinak adierazten ditu.

(a) IK gorputzeko bigarren eragiketa adierazten du eta orduan elementu neutroa adierazteko 1_{IK} notazioa erabiliko dugu.

(b) Kanpoko biderketa adierazten du.

Adibideak 2.1.3.

(i) $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala da ondorengo batuketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kanpoko biderketa:

$$k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n), \forall k \in \mathbb{R}, \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Kasu orokorra, IK edozein gorputza bada IK^n IK-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:

Eragiketa:

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n), \forall (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in IK^n.$$

Kanpoko biderketa:

$$k(x_1, ..., x_n) = (kx_1, ..., kx_n), \forall k \in IK, \forall (x_1, ..., x_n) \in IK^n.$$

(ii) $M_{n\times m}(IK) = \{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad | \quad a_{ij} \in IK, \forall i \in \{1, ..., n\}$

$, \forall j \in \{1, .., m\}\}$ *IK-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:*

Eragiketa:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \forall (a_{ij}), (b_{ij}) \in M_{n\times m}(IK).$$

[1]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[2]

Kanpoko biderketa:

$$k(a_{ij}) = (ka_{ij}), \forall k \in IK, \forall (a_{ij}) \in M_{n\times m}(IK).$$

(iii) $P_n(IK) = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \quad | \quad a_i \in IK, i = 0, ..., n\}$ *IK-espazio bektoriala da ondorengo eragiketa eta kanpoko biderketarekin:*

Eragiketa:

$$(a_0+a_1x+...+a_nx^n)+(b_0+b_1x+...+b_nx^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_n+b_n)x^n$$

$$, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n, b_0 + b_1x + ... + b_nx^n \in P_n(IK)$$

Kanpoko biderketa:

$$k(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) = ka_0 + ka_1x + ... + ka_nx^n,$$

$$\forall k \in IK, \forall a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in P_n(IK).$$

Teorema 2.1.4. *Izan bedi V IK-espazio bektoriala. Orduan hurrengo propietateak betetzen dira:*

(i) $k \cdot 0_V = 0_V, \forall k \in IK.$

(ii) $0_{IK} \cdot v = 0_V, \forall v \in V.$

(iii) $k \cdot v = 0_V$ *da baldin eta soilik baldin* $k = 0_{IK}$ *edo* $v = 0_V$ *bada.*

(iv) $-v = (-1_{IK})v, \forall v \in V.$

Frogapena.

(i) $k \cdot 0_V =$ elementu neutroa denez $= k(0_V + 0_V) =$ espazio bektorarialaren definizioaren propietateak erabiliz $= k0_V + k0_V$ eta V taldean elementuan sinplifikagarriak direnez $0_V = k0_V$.

(ii) Era berean frogatzen da.

(iii) Aurreko bi atalak erabiliz, $k = 0_{IK}$ edo $v = 0_V$ bada orduan $k \cdot v = 0_V$ betetzen da. Beste inplikazioa frogatzeko, demagun $k \neq 0_{IK}$ dela. Orduan

[2] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[3]

k gorputzeko elementu alderanzgarria denez biderketarekiko existituko da k^{-1} bere alderantzizko. Beraz $k^{-1}k \cdot v = k^{-1}0_V$ eta espazio bektorialaren definizioko propietateak erabiliz $v = 0_V$ ondorioztatzen dugu.

(iv) Ondorio hau frogatzeko nahiko da $(-1_{IK})v$ v-ren alderantzizkoa dela frogatzen badugu. Horretarako $(-1_{IK})v+v =$ espazio bektorialaren definizioko propietateetako bat erabiliz $= (-1_{IK})v+(1_{IK})v =$ berriz ere definizioko propietate bat erabiliz $= (-1_{IK}+1_{IK})v = 0_{IK}v = 0_V$.

■

2.2 Azpiespazioak

Definizioa 2.2.1. *Izan bedi V IK-espazio bektoriala. $W \subseteq V$ azpimultzo bat V-ren* **azpiespazio bektoriala**, *edo azpiespazioa, dela esaten da, eta $W \leq V$ denotatuko dugu, hurrengo baldintzak betetzen baditu:*

(i) V-ko eragiketa W-n ere eragiketa da, hau da:

$$w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W.$$

(ii) V-ko kanpoko biderketa W-n ere kanpoko biderketa da, hau da:

$$kw \in W, \forall k \in IK, \forall w \in W.$$

(iii) W eragiketa eta kanpoko biderketa horiekin IK-espazio bektoriala da.

Adibideak 2.2.2. *V IK-espazio bektoriala bada $\{O_V\}$ eta V azpiespazioak dira beti, azpiespazio hauek tribialak deitzen dira.*

Teorema 2.2.3. *Izan bitez V IK-espazio bektoriala eta $\emptyset \neq W \subseteq V$. Orduan W V-ren azpiespazioa da baldin eta soilik baldin hurrengo bi baldintzak betetzen baditu:*

1.- $w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W$.

2.- $kw \in W, \forall k \in IK, \forall w \in W$.

Frogapena. Inplikazioetako bat berehalakoa da beraz beste frogatzea nahikoa dugu. Demagun W azpimultzo ez-hutsak bi propietate hauek betetzen dituela

[3]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[4]

1.- $w_1 + w_2 \in W, \forall w_1, w_2 \in W$.

2.- $kw \in W, \forall k \in IK, \forall w \in W$.

W azpiespazio dela frogatzeko W eragiketa eta kanpoko biderketa horiekin IK-espazio bektoriala dela frogatu behar dugu. Argi eta garbi, $+$ eragiketak propietate elkarkorra eta trukakorra betetzen ditu (V-n betetzen direlako eta $W \subseteq V$ delako). Gainera espazio bektorialaren definizioko $(i), (ii), (iii)$ eta (iv) ere betetzen ditu arrazoi berdinagatik.

Bestalde, $\exists w \in W$ eta ondorioz, 2.- baldintza eta aurreko ataleko ondorioak erabiliz, $0_V = O_{IK} w \in W$. Orduan elementu neutroa aurkitu dugu. Azkenengoz, $w \in W$ bada $-w = (-1_{IK})w \in W$ bere alderantzizkoa ere W-n dago.

■

Adibideak 2.2.4.

(i) Izan bedi $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y = x\}$ *azpiespazioa da baina* $W' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad y = x + 1\}$ *ez.*

(ii) Izan bedi $M_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $W = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad | \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ *azpiespazioa da.*

(iii) Izan bitez V IK*-espazio bektoriala eta* $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ *bektore finkoak orduan* $\{k_1 v_1 + ... + k_n v_n \quad | \quad k_i \in IK, i = 1, .., n\}$ V*-ren azpiespazioa da. Azpiespazio hau* $\langle v_1, ..., v_n \rangle$ *moduan denotatuko dugu eta* $v_1, ..., v_n$ *bektoreek sortutako azpiespazioa deitzen da. Orokorrean,* $S \subseteq V$ *bada* S*-ko sortutako azpiespazioa honela definitzen da:*

$$\langle S \rangle = \{k_1 v_1 + ... + k_n v_n \quad | \quad k_i \in IK, v_i \in S, i = 1, ..., n\}$$

Froga daiteke $\langle S \rangle$ *dela* S *barruan duen azpiespaziorik txikiena.*

Definizioa 2.2.5. *Izan bitez* W_1 *eta* W_2 V*-ren azpiespazioak.* W_1 *eta* W_2*-ren* **batura**, $W_1 + W_2$ *denotatuko duguna, honela definitzen da:*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \quad | \quad w_i \in W_i, i = 1, 2\}$$

Batura **zuzena** *dela esaten da baldin eta* $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ *betetzen bada, eta kasu honetan* $W_1 \oplus W_2$ *moduan denotatuko dugu.*

[4]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[5]

Adibideak 2.2.6. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala. Orduan* $\langle(1,0,0)\rangle + \langle(1,1,0)\rangle = \{(x,y,0) \quad | \quad x,y \in \mathbb{R}\}$ *eta gainera batura zuzena da.*

Teorema 2.2.7. *Izan bitez* W_1 *eta* W_2 V*-ren azpiespazioak. Orduan*

(i) $W_1 \cap W_2$ *eta* $W_1 + W_2$ V*-ren azpiespazioak dira.*

(ii) W_1 *eta* W_2*-ren arteko batura zuzena da baldin eta soilik baldin:*

$$\forall w \in W_1 + W_2, \exists!, w_i \in W_i, i = 1,2 \text{ non } w = w_1 + w_2 \text{ betetzen den.}$$

Frogapena.

(i) W_1+W_2 azpiespazioa dela frogatuko dugu, beste era berean egiten baita. $\emptyset \neq W_1 + W_2 \subseteq V$ denez, karakterizarioa erabiliz, hurrengo bi propietateak frogatu behar ditugu:

$$(w_1 + w_2) + (w_1^{'} + w_2^{'}) \in W_1 + W_2, \forall w_1 + w_2, w_1^{'} + w_2^{'} \in W_1 + W_2.$$

$$k(w_1 + w_2) \in W_1 + W_2, \forall w_1 + w_2 \in W_1 + W_2, \forall k \in IK.$$

Baina $(w_1 + w_2) + (w_1^{'} + w_2^{'}) = (w_1 + w_1^{'}) + (w_2 + w_2^{'})$ denez eta W_1 eta W_2 azpiespazioak direnez, hau da $w_1 + w_1^{'} \in W_1, w_2 + w_2^{'} \in W_2$, berehalakoa da lehenengo baldintza. Bigarrena antzera frogatzen da.

(ii) $\Rightarrow$ frogatuko dugu lehenengo. Demagun existitzen direla $w_i^{'} \in W_i$, $i = 1,2$, non $w_1 + w_2 = w = w_1^{'} + w_2^{'}$ betetzen duten. Orduan $w_1 - w_1^{'} = w_2^{'} - w_2$ izango dugu, berdintzaren lehenengo partea W_1-en dago, W_1 azpiespazioa delako eta bigarrena berriz W_2-n. Ondorioz bektore hori $W_1 \cap W_2$ dago eta batura zuzena denez bektore nulua izan behar du.

$\Leftarrow$ frogatuko dugu. Izan bedi $v \in W_1 \cap W_2$ orduan $v = v + 0_V$ adierazpenak v W_1 eta W_2-ko bektoreen batura bezala adierazten du. Bestalde, $v = 0_V + v$ adierazpenak ere gauza bera adierazten du. Hipotesiz, adierazteko modua bakarra denez $v = 0_V$ izan behar du. ∎

Kasu orokorra

Definizioa 2.2.8. *Izan bitez* $W_1, W_2, ..., W_n$ V*-ren azpiespazioak.* $W_1, W_2, ..., W_n$*-ren* **batura***,* $W_1 + W_2 + ... + W_n$ *denotatuko duguna, honela definitzen da:*

$$W_1 + W_2 + ... + W_n = \{w_1 + w_2 + ... + w_n \quad | \quad w_i \in W_i, i = 1,2,...,n\}$$

[5] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[6]

Batura **zuzena** *dela esaten da baldin eta* $W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_n) = \{0_V\}$ *bada* $i = 1, ..., n$*, eta kasu honetan* $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ *moduan denotatuko dugu.*

Adibideak 2.2.9. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala. Orduan* $W_1 = \langle(1,0,0)\rangle$, $W_2 = \langle(1,1,0)\rangle$ *eta* $W_3 = \langle(1,1,1)\rangle$ *azpiespazioen batura zuzena da eta batura* $\mathbb{R}^3$ *da.*

Teorema 2.2.10. *Izan bitez* $W_1, W_2, ..., W_n$ V*-ren azpiespazioak. Orduan*

(i) $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ *eta* $W_1 + W_2 + ... + W_n$ V*-ren azpiespazioak dira.*

(ii) $W_1, W_2, ..., W_n$*-ren arteko batura zuzena da baldin eta soilik baldin* $\forall w \in W_1 + W_2 + ... + W_n, \exists! w_i \in W_i i = 1, 2, ..., n$ *non* $w = w_1 + w_2 + ... + w_n$ *betetzen den.*

Frogapena. n gaineko indukzioa erabiliz. ∎

2.3 Oinarriak eta Dimentsioa

2.3.1 Konbinazio Lineala

Definizioa 2.3.1. *Izan bitez* $v_1, ..., v_n \in V$ *finkoak. Beste bektore bat* $v \in V$ $v_1, ..., v_n$ *bektoreen* **konbinazio lineala** *dela esaten baldin eta existitzen badira* $k_1, ..., k_n \in IK$ *non* $v = k_1 v_1 + ... + k_n v_n$ *betetzen den, hau da* $v \in \langle v_1, ..., v_n\rangle$ *betetzen bada.* $k_1, ..., k_n$ *eskalarrak konbinazio linealaren* **koefizienteak** *deitzen dira.*

Adibideak 2.3.2.

(i) Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala.* $v = (1, 0, -1)$ *bektorea* $(1,0,0), (1,1,0)$ *eta* $(1,1,1)$ *bektoreen konbinazio lineala da.*

(ii) Izan bedi $P_3(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala.* $v = 1 - 2x + x^3$ *bektorea* $1, 1 + x, 1 + x + x^2$ *eta* $1 + x + x^2 + x^3$ *bektoreen konbinazio lineala da.*

2.3.2 Sistema Askea

Definizioa 2.3.3. *Izan bitez* $v_1, ..., v_n \in V$ *bektore finkoak.* $v_1, .., v_n$ **linealki independenteak** *direla, edo* $\{v_1, ..., v_n\}$ **sistema askea**, *dela esango dugu*

[6] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[7]

baldin eta hurrengo inplikazioa betetzen badu:

$$k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n = 0_{IK} \Rightarrow k_1 = k_2 = ... = k_n = 0_{IK}.$$

Beste kasuan bektoreak **linealki dependenteak**, *edo* **sistema lotua**, *dela esango dugu.*

Adibideak 2.3.4.

(i) Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ *sistema askea da.*

(ii) Izan bedi $M_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\}$ *sistema lotua da.*

Definizioa 2.3.5. *Izan bedi* $\emptyset \neq T \subseteq V$ *azpimultzoa.* T **askea** *dela esango dugu baldin eta bere azpimultzo finitu bakoitza sistema askea bada, hau da:*

$$\{v_1, ..., v_n\} \textit{ sistema askea }, \forall \{v_1, ..., v_n\} \subseteq T.$$

Beste kasuan T **lotua** *dela esango dugu.*

Adibideak 2.3.6. *Izan bedi* $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala orduan* $\{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *multzo infinitua lotua da.*

Lema 2.3.7. *Izan bedi* $T \subseteq V$ *askea eta demagun* v *ezin dela* T*-ko elementuen konbinazio lineal moduan adierazi. Orduan* $T \cup \{v\}$ *ere askea da.*

Frogapena. Izan bedi $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq T \cup \{v\}$. $\{v_1, ..., v_n\}$ sistema askea dela frogatu behar dugu eta horretarako bi kasu bereizten ditugu.

1.- Kasua: $v \notin \{v_1, ..., v_n\}$. Orduan $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq T$ eta T askea denez $\{v_1, ..., v_n\}$ sistema askea izango da.

2.- Kasua: $v \in \{v_1, ..., v_n\}$. Demagun $v_n = v$ dela, orduan $\{v_1, ..., v_{n-1}, v\}$ sistema askea dela frogatu behar dugu. Horretarako $k_1v_1 + ... + k_{n-1}v_{n-1} + kv = 0_V$ berdintzan $k = 0_{IK}$ izan behar da, bestela, existituko litzateke k^{-1} eta orduan v askatuz, v T-ko elementuen konbinazio lineala dela frogatuko genuke eta hau ezinezkoa da hipotesiagatik. Beraz $k_1v_1 + ... + k_{n-1}v_{n-1} = 0_V$ baina orain $v_1, ..., v_{n-1} \in T$ direnez eta T askea denez konbinazio linealeko koefiziente guztiak nuluak izan behar dira. ■

[7]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[8]

Adibideak 2.3.8. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala.* $(1,0,0)$ *bektore ez-nulua denez* $T=\{(1,0,0)\}$ *sistema askea da. Orduan, aurreko lemaren arabera,* $v\notin\langle(1,0,0)\rangle$ *aukeratuz, adibidez* $v=(1,0,-1)$, $T\cup\{(1,0,-1)=\{(1,0,0),(1,0,-1)\}$ *ere askea da. Prozesua jarraituz,* $w\notin\langle(1,0,0),(1,0,-1)\rangle$ *aukeratuz hurrengo multzo hau ere* $\{(1,0,0),(1,0,-1)\}\cup\{(2,1,5)\}$ *askea da. Baina orain aurrera ezin dugu jarraitu.*

2.3.3 Sistema Sortzailea

Definizioa 2.3.9. *Izan bedi* $S\subseteq V$ *azpimultzoa.* S V*-ren* **sistema sortzailea** *dela esango dugu baldin eta* $V=\langle S\rangle$ *betetzen bada, hau da,* V*-ko edozein bektorea* S*-ko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da.*

Adibideak 2.3.10. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$*-espazio bektoriala. Orduan* $\{(1,0,0),(1,1,0),$

$(1,1,1)\}$ *bektore sistema* $\mathbb{R}^3$*-ren sistema sortzaile bat da.*

Lema 2.3.11. *Izan bedi* S V *espazioaren sistema sortzaile. Demagun existitzen dela* $w\in S$ *bektorea* $S-\{w\}$ *multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adieraz daiteekena. Orduan* $S-\{w\}$ *ere* V*-ren sistema sortzaile bat da.*

Frogapena. Izan bedi $v\in V$ bektorea. Frogatu behar dugu $S-\{w\}$ multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal dela. Hipotesiz badakigu v S multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adieraz daitekeela, hau da, existitzen dira $k_1,...,k_{n-1},k\in K$ eta $v_1,...,v_{n-1},w\in S$ non hurrengoa betetzen den:

$$v=k_1v_1+...k_{n-1}v_{n-1}+kw$$

Orain $v_1,...,v_{n-1}\in S-\{w\}$, w-ren desberdinak direlako eta gainera, hipotesiagatik w $S-\{w\}$ nmultzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da ondorioz v $S-\{w\}$ multzoko bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da. ■

Definizioa 2.3.12. V **finituki sortua** *dela esaten da existitzen bada* S V*-ren sistema sortzaile finitua* ($|S|$ *finitua).*

Adibideak 2.3.13. $P_3(\mathbb{R})$ *finituki sortua da* $\{1,x,x^2,x^3\}$ $P_3(\mathbb{R})$*-ren sistema sortzaile finitua delako.*

[8] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[9]

2.3.4 Oinarria

Definizioa 2.3.14. *β V-ren* **oinarria** *dela esaten da baldin eta β V-ren sistema sortzailea eta sistema askea bada.*

Adibideak 2.3.15. *1.- Izan bedi $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala, definitzen ditugu $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$, 1 i. tokian dugu, $i = 1, ..., n$ orduan $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat da, oinarri hau* **kanonikoa** *deitzen da eta β_k moduan denotatuko dugu.*

2.- Izan bedi $P_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala orduan $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ espazioaren oinarri bat da.

3.- Izan bedi $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-espazio bektoriala orduan $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \right.$

$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *espazioaren oinarri bat da.*

4.- Izan bedi $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x - y + z = 0\}$ $\mathbb{R}^3$-ren azpiespazioa orduan $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ W-ren oinarri bat da.

Teorema 2.3.16. *Izan bedi V finituko sortutako espazio bektoriala. Orduan V-k oinarri finitu bat du.*

Frogapena. Izan bedi S V-ren sistema sortzaile finitu bat. Bi aukera daude:

1.- S sistema askea izatea. Orduan S V-ren oinarria da eta frogapena bukatu da.

2.- S sistema lotua izatea. Orduan existitzen dira $k_1, ..., k_n \in K$ ez denak nuluak eta $v_1, ..., v_n \in V$ bektoreak non $k_1 v_1 + ... + k_n v_n = 0_V$ den. Baina orduan bektoreetako bat besteen konbinazio lineal moduan adieraz daiteke, demagun v_n dela bektore hori. Orduan, lema erabiliz, $S - \{v_n\}$ ere sistema sortzailea da.

Prozedura jarraituz $S - \{v_n\}$ multzoarekin azkenean oinarri bat lortuko dugu. ■

[9]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[10]

Teorema 2.3.17. *Izan bitez V n dimentsioko IK-espazio bektoriala eta $S \subseteq V$ V-ren sistema sortzailea. Orduan betetzen dira:*

(i) Existitzen da β V-ren oinarria non $\beta \subseteq S$ betetzen den.

(ii) $|S| \geq n$.

(iii) $|S| = n$ bada orduan S V-ren oinarria da.

Frogapena. Lehenengo atala aurreko teoreman frogatu dugu

(ii) $\beta \subseteq S$ denez kardinalak hartuz $|\beta| \subseteq |S|$.

(iii) $|S| = n$ bada orduan (i) ataleko β oinarria eta S berbera da.

■

Teorema 2.3.18. *Izan bitez V n dimentsioko IK-espazio bektoriala eta $T \subseteq V$ sistema askea. Orduan betetzen dira:*

(i) T V-ren oinarri bateraino luza daiteke, hau da, existitzen da β V-ren oinarria non $T \subseteq \beta$ betetzen den.

(ii) $|T| \leq n$.

(iii) $|T| = n$ bada orduan T V-ren oinarria da.

Frogapena. (i) Izan bitez T sistema askea eta $\beta' = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria. Orduan bi posibilitate daude:

1.- T V-ren sistema sortzailea da eta orduan oinarria, beraz frogapena bukatuta dago kasu honetan.

2.- T ez da V-ren sistema sortzailea. Orduan $\langle T \rangle \neq V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ betetzen da. Beraz, existitzen da $i \in \{1, ..., n\}$ non $v_i \notin \langle T \rangle$, demagun $i = 1$ dela. Lema bat erabiliz, badakigu $T \cup \{v_1\}$ ere sistema askea dela. Aurreko prozedura jarraituz sistema aske berri honekin azkenean β oinarri bat lortuko dugu non $T \subseteq \beta$ betetzen den.

(ii) $T \subseteq \beta$ denez kardinalak hartuz $|T| \subseteq |\beta|$.

(iii) $|T| = n$ bada orduan (i) ataleko β oinarria eta T berbera da. ■

[10]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[11]

Teorema 2.3.19. *Izan bitez $U_1, ..., U_n$ V-ren dimentsio finituko azpiespazio bektorialak eta $\beta_{U_1}, ..., \beta_{U_n}$ U_1,...,U_n-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan:*

$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \Leftrightarrow \beta_{U_1} \cup \cdots \cup \beta_{U_n}, U_1 + \cdots + U_n$ *azpiespazioaren oinarria bada*

Frogapena. n gaineko indukzioa erabiliz, $n = 2$ kasuan bakarrik frogatuko dugu.

$\Rightarrow$. Demagun $U_1 \oplus U_2$ betetzen dela. Dakigunez $\beta_{U_1} \cup \beta_{U_2}$ $U_1 + U_2$ azpiespazioaren sistema sortzailea da beti. Orain askea dela frogatuko dugu, $\beta_{U_1} = \{v_1, ..., v_s\}$ eta $\beta_{U_2} = \{w_1, ..., w_t\}$ badira,:

$$k_1v_1 + ... + k_sv_s + k_1^{'}w_1 + ... + k_t^{'}w_t = 0_V \Rightarrow k_1 = ... = k_t^{'} = 0_{IK}$$

Izan bitez $u_1 = k_1v_1 + ... + k_sv_s$ eta $u_2 = k_1^{'}w_1 + ... + k_t^{'}w_t$. Orduan $u_1 = -u_2 \in U_1 \cap U_2$ betetzen da. Baina batura zuzena denez $u_1 = -u_2 = 0_V$ eta ondorioz, $\{v_1, ..., v_s\}$ eta $\{w_1, ..., w_t\}$ sistema askeak direnez inplikazioa frogatuta dago.

$\Leftarrow$. Demagun $\beta_{U_1} \cup \beta_{U_2}$ $U_1 + U_2$-ren oinarria dela. Froga dezagun $U_1 \cap U_2 = \{0_V\}$ betetzen dela. Horretarako, izan bedi $v \in U_1 \cap U_2$ beraz, $\beta_{U_1} = \{v_1, ..., v_s\}$ eta $\beta_{U_2} = \{w_1, ..., w_t\}$ badira, $v = k_1v_1 + ... + k_sv_s = k_1^{'}w_1 + ... + k_t^{'}w_t$. Orduan $k_1v_1 + ... + k_sv_s - k_1^{'}w_1 - ... - k_t^{'}w_t = 0_V$. Baina oinarrien bildura sistema askea denez, derrigorrez $k_1 = ... = k_s = 0_{IK}$ beteko da eta orduan $v = k_1v_1 + ... + k_sv_s = 0_V$.

■

Teorema 2.3.20. *Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan oinarri guztiak kardinal berbera dute.*

Definizioa 2.3.21. *Izan bedi $\{0_V\} \neq V$ finituki sortua. Orduan oinarri baten kardinala, aurreko teoremaren arabera berdin du ze oinarri aukeratu, V-ren* **dimentsioa** *deitzen da eta denotatuko dugu $dim_{IK}V$ edo $dimV$ moduan.*

Adibideak 2.3.22. *1.- Izan bedi IK^n IK espazio bektoriala orduan $dimIK^n = n$ da.*

2.- Izan bedi $P_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala orduan $dimP_n(\mathbb{R}) = n + 1$ da.

3.- Izan bedi $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala orduan $dimM_{n\times m}(\mathbb{R}) = nm$ da.

[11] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[12]

2.3.5 Azpiespazioen dimentsioa

Teorema 2.3.23. *Izan bitez V dimentsio finituko IK espazio bektoriala eta $W \leq V$. Orduan W ere dimentsio finitukoa da eta $dimW \leq dimV$. Gainera:*

$$dimW = dimV \Leftrightarrow W = V \ bada$$

Frogapena. Izan bedi $\beta_W = \{w_1, ..., w_s\}$ W-ren oinarri bat. Orduan, $W \leq V$ denez, V-ko bektoreak dira eta gainera sistema askea V-n. Beraz, teorema erabiliz, existitzen da β V-ren oinarria non $\beta_W \subseteq \beta$ betetzen den. Orain, dimentsioaren definizioagatik, $dimW \leq dimV$ dela frogatzen du. Gainera $dimW = dimV$ da baldin eta soilik baldin $\beta_W = \beta$, hau da, $W = V$ betetzen bada. ∎

Definizioa 2.3.24. *Izan bitez V IK espazio bektoriala eta $W \leq V$. Beste azpiespazio bat U W-ren* **betegarri** *bate dela esango dugu baldin eta $V = W \oplus U$ betetzen bada. Hau da, W eta U-ren arteko batura zuzena da eta gainera $W + U = V$ da.*

Teorema 2.3.25. *Izan bitez V dimentsio finituko IK espazio bektoriala eta $W \leq V$. Orduan W azpiespazio bektorialak betegarri bat du.*

Frogapena. V dimentsio finitukoa denez, aurreko teorema erabiliz, W ere dimentsio finitukoa da eta gainera $dimW \leq dimV$ betetzen da. Izan bedi $\beta_W = \{w_1, ..., w_s\}$ W-ren oinarri bat, sistema askea denez V-n, V-ren oinarri bateraino luza daiteke, $\beta = \{w_1, ..., w_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$ V-ren oinarria lortuz. Definitzen dugu $U = \langle v_{s+1}, ..., v_n rangle$ azpiespazioa eta W-ren betegarri bat dela frogatuko dugu. Izan bitez $\beta_W = \{w_1, ..., w_s\}$ eta $\beta_U = \{v_{s+1}, ..., v_n\}$ W eta U-ren oinarriak hurrenez-hurren. Orduan $\beta_W \cup \beta_U$ sistema askea denez W eta U-ren arteko batura zuzena da eta gainera bildura V-ren oinarria denez teorema frogatuta dago. ∎

Adibideak 2.3.26. *Izan bedi $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ espazio bektoriala. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x - y + z = 0\}$ azpespazioaren betegarri bat lortuko dugu aurreko teoremako frogapena jarraituz.*

Lehenengo W-ren oinarri bat lortu behar dugu. Argi eta garbi

[12] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[13]

$W = \langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle$ da eta gainera sistema askea denez $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ W-ren oinarri bat da.

Ondoren $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bateraino luzatzen dugu. Adibidez $e_1 = (1,0,0)$ bektorea gaineratuz, $\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$ lortuko genuke. Beraz $U = \langle(1,0,0)\rangle$ W-ren betegarri bat da.

Ohartu $U' = \langle(0,1,0)\rangle$ ere betegarria dela, beraz betegarria ez da bakarra.

Teorema 2.3.27. *Izan bitez U eta W V-ren dimentsio finituko azpiespazio bektorialak. Orduan $U+W$ ere dimentsio finitukoa da eta gainera:*

$$dim(W+U) = dimW + dimU - dim(W\cap U).$$

Frogapena. Hurrengo definizioak ditugu $dimW = r, dimU = s$ eta $dim(U\cap W) = t$.

Izan bedi $\beta_{W\cap U} = \{w_1,...,w_t\}$ $W\cap U$ azpiespazioaren oinarri bat.

1.- $W\cap U \leq W$ denez, W-ren oinarri bateraino luza daiteke:

$$\{w_1,...,w_t,w_{t+1},...,w_r\}$$

2.- $W\cap U \leq U$ denez, U-ren oinarri bateraino luza daiteke:

$$\{w_1,...,w_t,u_{t+1},...,u_s\}$$

Teorema frogatuta dago baldin eta frogatzen badugu:

$$\{w_1,...,w_t,w_{t+1},...,w_r,u_{t+1},...,u_s\}$$

$W+U$-ren oinarri bat dela. Horretarako, definizioaren arabera, $W+U$-ren sistema sotzailea eta sistema askea dela frogatuko behar dugu.

(i) $W+U$-ren sistema sortzailea delaren frogapena. Baturako edozein betore $v = w+u$ moduan adierazi ahal da. Gainera $w\in W$ denez w $w_1,...,w_t,w_{t+1},...,w_r$ bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da, eta, era berean $u\in U$ denez u $w_1,...,w_t,u_{t+1},...,u_s$ bektoreen konbinazio lineal moduan. Beraz, v $w_1,...,w_t,w_{t+1},...,w_r,u_{t+1},...,u_s$ bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da.

(ii) Sistema askea delaren frogapena:

$$k_1w_1 + ... + k_tw_t + k_{t+1}w_{t+1} + ... + k_rw_r + \lambda_{t+1}u_{t+1} + ... + \lambda_su_s = 0_V \Rightarrow$$

[13]OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[14]

$$\Rightarrow k_1 = ... = \lambda_s = 0_{IK}$$

Definitzen dugu $w = k_1 w_1 + ... + k_t w_t + k_{t+1} w_{t+1} + ... + k_r w_r$ eta $u = \lambda_{t+1} u_{t+1} + ... + \lambda_s u_s$. Orduan, aurreko berdintzatik $w = -u \in W \cap U$ eta $\{w_1, ..., w_t\}$ $W \cap U$ azpiespazioaren oinarri bat denez $w = k_1' w_1 + ... + k_t' w_t$ moduan adierazi ahal da, baina orduan $k_1 w_1 + ... + k_t w_t + k_{t+1} w_{t+1} + ... + k_r w_r = k_1' w_1 + ... + k_t' w_t$ izango dugu eta ondorioz $(k_1 - k_1')w_1 + ... + (k_t - k_t')w_t + k_{t+1} w_{t+1} + ... + k_r w_r = 0_V$ da eta $\{w_1, ..., w_t, w_{t+1}, ..., w_r\}$ W-ren oinarria denez derrigorrez $k_{t+1} = ... = k_r = 0_{IK}$. Hasierako adierazpenean ordezkatuz $k_1 w_1 + ... + k_t w_t + +\lambda_{t+1} u_{t+1} + ... + \lambda_s u_s = 0_V$ dugu eta $\{w_1, ..., w_t, u_{t+1}, ..., u_s\}$ U-ren oinarria denez konbinazioko koefiziente guztiak zero izan behar dira. ■

2.4 Koordenatuak

Teorema 2.4.1. *Izan bedi $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V-ren oinarria. Orduan V-ko edozein bektore β-ko bektoreen konbinazio lineal moduan era bakar batean adierazi ahal da. Hau da, $v \in V$ bada orduan existititzen dira $\lambda_1, ..., \lambda_n \in IK$ bakarrak non $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ betetzen den.*

Frogapena. β V-ren sistema sortzailea eta sistema askea da.

Existentziaren frogapena: β sistema sortzailea izateagatik, V-ko edozein bektorea v $v_1, ..., v_n$ bektoreen konbinazio lineal moduan adierazi ahal da. Hau da, existitzen dira $\lambda_1, ..., \lambda_n \in IK$ non $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ betetzen den.

Bakartasunaren frogapena: Demagun existitzen direla $k_1, ..., k_n \in IK$ non $v = k_1 v_1 + ... + k_n v_n$ betetzen den. Orduan,

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = v = k_1 v_1 + ... + k_n v_n$$

Edo

$$(\lambda_1 - k_1)v_1 + ... + (\lambda_n - k_n)v_n = 0_V.$$

Baina β sistema askea denez, $\lambda_1 - k_1 = \lambda_2 - k_2 = \cdots = \lambda_n - k_n = 0_{IK}$. Ondorioz $\lambda_1 = k_1, \lambda_2 = k_2, \cdots, \lambda_n = k_n$. ■

[14] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[15]

Definizioa 2.4.2. *Izan bedi* $\beta = \{v_1, .., v_n\}$ V*-ren oinarri bat.* $v \in V$ *betorearentzat existitzen dira* n *eskalar bakarrak* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *non* $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$ *den.* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ v*-ren* **koordenatuak** β **oinarriarekiko** *deitzen ditzen dira eta denotatuko dugu* $M_\beta(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Adibideak 2.4.3. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ *espazio bektoriala.*

1.- $\beta_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ *oinarri kanonikoa bada* $M_{\beta_k}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *da.*

2.- $\beta = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ *oinarriarekiko* $M_\beta(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}$ *da.*

Izan bitez $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ eta $\beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V-ren bi oinarriak. Orduan $v \in V$ bektorearentzat $M_\beta(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ eta $M_{\beta'}(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$ desberdinak dira. Bi matrize hauen arteko erlazioa lortuko dugu. Horretarako v bi matrizeen biderkadura moduan adieraziko dugu:

$$v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = (v_1 \cdots v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bestalde $v_i \in V$ denez eta β' V-ren oinarria, existituko dira $a_{1i}, ..., a_{ni}$ eskalar bakarrak non $v_i = a_{1i} v_1' + ... + a_{ni} v_n'$ betetzen duen $i = 1, ..., n$. Aurrekoan bezala matrizeen biderkadura moduan adierazi ahal dugu $v_i = (v_1' \cdots v_n') \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$, $i = 1, ..., n$. Biderkadura hauek aurreko berdintzan ordezkatzen baditugu ondorengo lortuko dugu:

$$v = (v_1' \cdots v_n') \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

[15] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia

[16]

Orduan adierazteko modua bakarra denez:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definizioa 2.4.4. *Aurreko hipotesietan* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *matrizea* β *oinarritik* β' *oinarrirako aldaketaren matrizea deitzen da eta denotatuko dugu* $M_\beta^{\beta'}$.

Frogatu dugu hurrengo teorema:

Teorema 2.4.5. *Izan bitez* $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ *eta* $\beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V*-ren bi oinarriak. Orduan:*

$$M_\beta^{\beta'} M_\beta(v) = M_{\beta'}(v).$$

Adibideak 2.4.6. *Izan bedi* $\mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$ *espazio bektoriala.* $\beta_k = \{e_1, e_2, e_3\}$ *eta* $\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ *oinarriak hartzen baditugu orduan:*

$$M_\beta^{\beta_k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ eta } M_{\beta_k}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Oharrak 2.4.7. *1.- Izan bitez* $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ *eta* $\beta' = \{v_1', ..., v_n'\}$ V*-ren bi oinarriak orduan* $M_\beta^{\beta'} M_{\beta'}^{\beta}$ β' *oinarritik* β' *oinarrirako aldaketaren matrizea da, hau da, identitate matrizea. Era berean* $M_{\beta'}^{\beta} M_\beta^{\beta'}$ β *oinarritik* β *oinarrirako aldaketaren matrizea da, hau da, identitate matrizea. Beraz* $M_\beta^{\beta'}$ *matrizea alderanzgarria da eta bere alderantzizkoa* $M_{\beta'}^{\beta}$.

2. Izan bedi $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ V*-ren oinarri bat.* $v \in V$ *bada* $v = (\lambda_1 \cdots \lambda_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *moduan ere adierazi ahal da, hau da koordenatuak lerroka jarriz. Baina orduan oinarri aldakekaren matrizea ere aldatuko litzateke aurrekoaren iraulia lortuz.*

[16] OCW Proiektua. Txomin Ramirez eta M. Asun Garcia